

日期: /

1. 上周作业

1. (1) 如 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ (2) 如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} E_m \\ -v^t B^{-1} \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} E_m B v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & \\ & \alpha - v^t B^{-1} v \end{pmatrix}$

由 $\det A = n-1$ 知 $\alpha - v^t B^{-1} v = 0$

故 $A \sim_c \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A$ 半正定

Remark: 类似可以证明若 $\text{rank } A = r$ 且 A 的前 r 阶顺序主子式均
为正, 则 A 半正定. 实际上若 $q|_{U \times U}$ 正定 (U 为 V 的子空间), 则
 q 的正惯性指数 $k \geq \dim U$.

3. (1) $\begin{cases} x_1 = y_1 + y_2 \\ x_2 = y_1 - y_2 \\ x_3 = y_3 \end{cases}$ 则原式 $\Leftrightarrow y_1^2 - y_2^2 + y_1 y_3 - y_2 y_3 + 2y_1 + y_3 + 1 = 0$

$(y_1 + \frac{y_3}{2})^2 - (y_2 + \frac{y_3}{2})^2 + 2y_1 + y_3 + 1 = 0$

$\begin{cases} z_1 = y_1 + \frac{y_3}{2} \\ z_2 = y_2 + \frac{y_3}{2} \\ z_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1^2 - z_2^2 + 2(z_1 - \frac{z_3}{2}) + z_3 + 1 = 0 \\ (z_1 + 1)^2 - z_2^2 = 0 \end{cases}$

故为两相交平面.

(2) $x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 + x_1 + 2x_2 - 4 = 0$

$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{3}{2} & -\frac{25}{4} \end{pmatrix}$

$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{5}{4} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{15}{4} \end{pmatrix} \quad x_1^2 - \frac{x_2^2}{4} - x_3^2 - \frac{15}{4} = 0$ 双叶双曲面

日期: /

4. 可以不妨设 $A = E_n$ 否则 $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ s.t. $A = P^t P$,

取 $E_n, (P^t)^{-1} B P^t$ 即可. (本题不必要)

法一: 考虑 $\det(kE_n + B)$ 若 $\exists k > 0$ s.t. $\det(kE_n + B) = 0$

$$\text{则 } \exists X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, (kE_n + B)X = 0 \Rightarrow X^t(kE_n + B)X = 0 \Rightarrow kX^tX = 0$$

故矛盾. 从而 $\det(kE_n + B)$ 无正实根, 故在 $(0, +\infty)$ 保号

$$\text{而 } \lim_{k \rightarrow +\infty} \det(kE_n + B) = +\infty \Rightarrow \det(E_n + B) > 0$$

Remark: 实际上上述多项式非0根只有纯虚根, 在 $\mathbb{C}$

$$(kE_n + B)X = 0 \Rightarrow BX = -kX \Rightarrow -\bar{k} \bar{X}^t = \bar{X}^t B^t = -\bar{X}^t B$$

$$\Rightarrow \bar{X}^t B X = \bar{X}^t (-kX) = -k \bar{X}^t X$$

$$\bar{X}^t B X = (\bar{X}^t B) X = \bar{k} \bar{X}^t X$$

故 $k = \bar{k} \Rightarrow k$ 为纯虚数

法二: 对 n 归纳, $n=1$ 时显然

$$\text{若 } n=k \text{ 时成立, 设 } B = \begin{pmatrix} B_{n-1} & \alpha \\ -\alpha^t & 0 \end{pmatrix}$$

$$E_n + B = \begin{pmatrix} E_{n-1} + B_{n-1} & \alpha \\ -\alpha^t & 1 \end{pmatrix} \text{ 由归纳假设, } \det(E_{n-1} + B_{n-1}) > 0$$

$$\begin{pmatrix} E_{n-1} & \\ \alpha^t (E_{n-1} + B_{n-1})^{-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{n-1} + B_{n-1} & \alpha \\ -\alpha^t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{n-1} + B_{n-1} & \\ & 1 + \alpha^t (E_{n-1} + B_{n-1})^{-1} \alpha \end{pmatrix}$$

日期:

/

$$\text{只需证 } 1 + \alpha^t (E_{n-1} + B_{n-1})^t \alpha > 0$$

$$\Leftrightarrow \det(1 + \alpha^t (E_{n-1} + B_{n-1})^t \alpha) > 0$$

$$\Leftrightarrow \det(E_{n-1} + \alpha \alpha^t (E_{n-1} + B_{n-1})^t) > 0$$

$$\Leftrightarrow \det(E_{n-1} + B_{n-1} + \alpha \alpha^t) > 0$$

为正定 + 反对称，故成立

法三：归纳，B分块同法二

$$E_n + B = \begin{pmatrix} E_{n-1} + B_{n-1} & \alpha \\ -\alpha^t & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} E_{n-1} + B_{n-1} + \alpha \alpha^t & 0 \\ -\alpha^t & 1 \end{pmatrix}$$

故直接由归纳假设得 $\det(E_n + B) > 0$

$$5. \begin{cases} AX + BY + CZ + D = 0 \\ x^2 + y^2 - z^2 = 0 \end{cases}$$

① $C=0$ ，不妨设 $B=1$ 则 $|y = -AX - D$

$$x^2 + (AX + D)^2 - z^2 = 0$$

$$(A^2 + 1)x^2 + 2ADx - z^2 + D^2 = 0$$

$D \neq 0$ 时为双曲线

$D = 0$ 时为相交直线

② $C \neq 0$ 不妨设 $C=1$ ，则 $|z = -AX - BY - D$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - (AX + BY + D)^2 = 0$$

日期:

/

$$\Rightarrow (1-A^2)x^2 + (1-B^2)y^2 - 2ABxy - 2ADx - 2BDy - D^2 = 0$$

$D=0$ 时 若 $|A|=|B|=1$

则 $AB \neq 0$ 时为相交直线, $AB=0$ 时为重合直线

若 $|A|, |B|$ 均不为 1

则 $1-A^2-B^2 > 0$ 时为一实点.

$1-A^2-B^2 = 0$ 时为重合直线

$1-A^2-B^2 < 0$ 时为相交直线

$D \neq 0$ 时

$1-A^2-B^2 < 0$ 时为双曲线

$1-A^2-B^2 = 0$ 时为抛物线

$1-A^2-B^2 > 0$ 时为圆或椭圆.

日期: /

2. 若 $A \in \mathcal{L}(V)$, $\alpha, A\alpha, \dots, A^{n-1}\alpha$ 为 V 的基

则 A 在该基下矩阵为 $F = \begin{pmatrix} 0 & & -a_0 \\ 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$ 形式

称为 Frobenius 矩阵

与 F 可交换的一定为 F 的多项式

将 $A^n \alpha = A(A^{n-1} \alpha)$ 由 $\alpha, \dots, A^{n-1} \alpha$ 线性表出,

设 $A^n \alpha = -a_0 \alpha - a_1 A\alpha - \dots - a_{n-1} A^{n-1} \alpha$

易知矩阵为 F ,

Remark: 设 $f = \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_0$ 则 $f(A) \alpha = 0$,

称 F 为多项式 f 的友矩阵.

下证与 F 可交换的一定为 F 的多项式

证明: 设 $AF = FA$, $AE_1 = k_1 e_1 + \dots + k_n e_n = (k_1 E + k_2 F + \dots + k_n F^{n-1}) e_1$

取 $\tilde{f} = k_1 + k_2 x + \dots + k_n x^{n-1}$ 则 $AE_1 = \tilde{f}(F) e_1$

若 $AE_k = \tilde{f}(F) e_k$, 则 $AE_{k+1} = AFe_k = FAE_k = F(\tilde{f}(F) e_k) = \tilde{f}(F) Fe_k$

故 $AE_{k+1} = \tilde{f}(F) e_{k+1}$ 从而 $AE_i = \tilde{f}(F) e_i (i=1, 2, \dots, n)$

故 $A = \tilde{f}(F)$ $\square$