1. 上周作业

1.1 B 正定. $v\in\mathbb{R}^{n-1}$, $a\in\mathbb{R}$ $A=\begin{pmatrix} B & v \\ v^t & a\end{pmatrix}$

证明 $\det A=0$ 则 A 半正定

Pf: $A=\begin{pmatrix} B & v \\ v^t & a\end{pmatrix} \xrightarrow{-v^tB^{-1}(1)+(2)} \begin{pmatrix} B & v \\ 0 & a-v^tB^{-1}v\end{pmatrix} \xrightarrow[-(1)B^{-1}v+(2)]{} \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & a-v^tB^{-1}v\end{pmatrix}$

$\det A=\det B\,(a-v^tB^{-1}v)=0 \Rightarrow a-v^tB^{-1}v=0$

$\Rightarrow A\sim\begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 半正定

1.2 (i) $x_1x_2+x_2x_3+x_1+x_2+x_3+1$

$=(x_1+1)(x_2+x_3+1)=0$

$\Rightarrow$ 为两张平面相交于一条直线

(ii) $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1+x_1+2x_2-4$

$=(y_1+y_3)^2-y_2^2-y_3^2+3y_1-y_2-4$ $\quad\begin{cases} x_1=y_1+y_2 \\ x_2=y_1-y_2 \\ x_3=y_3\end{cases}$

$=z_1^2-z_2^2-z_3^2+3z_1-3z_3-z_2-4$ $\quad\begin{cases} z_1=y_1+y_3 \\ z_2=y_2 \\ z_3=y_3\end{cases}$

$=(z_1+\frac{3}{2})^2-(z_3+\frac{3}{2})^2-(z_2+\frac{1}{2})^2-\frac{15}{4}$

双叶双曲面

1.3. $A\in SM_n(\mathbb{R})$ 正定. $K\in SSM_n(\mathbb{R})$ 证明 $\det(A+K)>0$

Pf: 法1. 不妨设 $A=I_n$, 否则 将A合同成 I_n

由 $\det(\lambda I-K)=\lambda^n+\cdots+(-1)^kS_k\lambda^{n-k}+\cdots+(-1)^nS_n$

S_k为 K 的所有 k 阶主子式之和

$\Rightarrow \det(\lambda I+K)=\lambda^n+\cdots+S_k\lambda^{n-k}+\cdots+S_n$

S_k为 K的所有 K阶主子式之和

$\Rightarrow \det(I+K)=1+S_1+S_2+\cdots+S_n\geq 1>0$

因为K的任意主子式仍然反对称, 则行列式 ≥ 0

法2. 考虑 $\det(A+\lambda K)$

claim $\det(A+\lambda K)\neq 0\quad \forall\lambda$

No.

Date

$$x^T \lambda K x \overset{\text{转置}}{=} -x^T \lambda K x$$

$(A+\lambda K)X=0 \Rightarrow X^T(A+\lambda K)X=0 \Longrightarrow X^TAX=0 \overset{A正定}{\Rightarrow} X=0 \Rightarrow A+\lambda K$ 非退化

$\det(A+\lambda K)$ 为 λ 的连续函数. $\lambda=0$ 时 $\det(A+\lambda K)=\det A>0$

$\Rightarrow \det(A+\lambda K)>0 \quad \forall\lambda$. (介值定理)

$\Rightarrow \det(A+K)>0$

2. 內容回顾

$$\begin{array}{ccccc}
\mathcal{A}\in L(V) & \xrightarrow{\text{基 } e} & M_n(F) & A: & \mathcal{A}e=(\mathcal{A}e_1,\cdots,\mathcal{A}e_n)=(e_1,\cdots,e_n)A \\
 & \searrow^{\text{基 } \tilde{e}=eP} & \uparrow & \updownarrow A=PBP^{-1} & \\
 & & M_n(F) & B & \mathcal{A}\tilde{e}=\tilde{e}B
\end{array}$$

$\mathcal{B}\cdot\mathcal{A} \longmapsto B\cdot A$

3. A 与 B 相似 $\Rightarrow$ $f(A)$ 与 $f(B)$ 相似 $\forall f\in F[x]$

特别地 "$f(A)=0 \Leftrightarrow f(B)=0$"

练习: 证明 $A=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\ &1&1&0\\ &&1&1\\ &&&1\end{pmatrix}$ 与 $B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\ &1&0&1\\ &&1&0\\ &&&1\end{pmatrix}$ 不相似

pf: 注意到 $(A-I)^2=\begin{pmatrix}0&0&1&0\\ 0&0&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\end{pmatrix}$, $(B-I)^2=0$

4. A 与 B 相似, C 与 D 相似 $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix}A&0\\0&C\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}B&0\\0&D\end{pmatrix}$ 相似

6. 线性变换 $\mathcal{A}:V\to V$ 是投影变换 $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}^2=\mathcal{A}$ $\Leftrightarrow$ $I-\mathcal{A}$ 为投影变换

pf 1. $V=\ker\mathcal{A}\oplus \mathrm{Im}\mathcal{A}$

2. $\mathcal{A}|_{\mathrm{Im}\mathcal{A}}=id_{\mathrm{Im}\mathcal{A}}$

3. $\mathcal{A}^2=\mathcal{A} \Rightarrow (I-\mathcal{A})^2=I-\mathcal{A}$

6. $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 证明 存在 $f(x)\in F[x]$ s.t. $f(\mathcal{A})=0$

pf: 注意到 $\mathcal{L}(V)$ 是 n^2 维线性空间

⇒ $Id, \mathcal{A}, \mathcal{A}^2, \cdots, \mathcal{A}^{n^2}$ 一定线性相关

⇒ $a_{n^2}\mathcal{A}^{n^2}+\cdots+a_0 Id=0$ for some $a_{n^2},\cdots,a_0$

7. 秩为 r 的幂等方阵 A 相似于 $\begin{pmatrix} I_r & \\ & 0 \end{pmatrix}$

pf: 由 5.

练习. 设 $0=V_0\xrightarrow{\mathcal{A}_0}V_1\xrightarrow{\mathcal{A}_1}V_2\to\cdots V_i\xrightarrow{\mathcal{A}_i}V_{i+1}\to\cdots\xrightarrow{\mathcal{A}_{n-1}}V_n=0$

满足 $\ker\mathcal{A}_i=\mathrm{Im}\,\mathcal{A}_{i+1}$

证明 $\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\dim V_i=0$

pf: 同构定理 $\sum(-1)^i\dim V_i=\sum(-1)^i(\dim\ker\mathcal{A}_i+\dim\mathrm{Im}\,\mathcal{A}_i)$

$=\sum(-1)^i\dim\mathrm{Im}\,\mathcal{A}_{i+1}+\sum(-1)^i\dim\mathcal{A}_i$

$=0$

• 设 V_1,V_2 为 V 的子空间. $W=V_1\cap V_2$，证明

$V_1+V_2/W\cong V_1/W\oplus V_2/W$

pf: 1. def. $f: V_1+V_2\to V_1/W\oplus V_2/W$

$v_1+v_2\to([v_1],[v_2])$

2. check f 良定义，即 若 $v_1+v_2=\tilde{v}_1+\tilde{v}_2$ 则 $[v_1]=[\tilde{v}_1],[v_2]=[\tilde{v}_2]$

3. $\ker f=W$

4. f 满射

• $\begin{pmatrix}A & \\ & B\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}A & \\ & C\end{pmatrix}$ 相似. 证明 B 与 C 相似

并不容易，需要后面的知识.