

# 第一次作业

1. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2, \beta_3$  是实数, 且二次多项式  $p(x) = ax^2 + bx + c$  满足

$$p(\alpha_i) = \beta_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

列出  $p(x)$  的系数  $a, b, c$  满足的线性方程组并写出该方程组对应的系数矩阵和增广矩阵.

2. 判定下列三个线性方程组是否相容和是否确定:

$$(a) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}, \quad (b) \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}, \quad (c) \begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 1 \end{cases}.$$

3. 设  $3 \times 4$  矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \lambda_1 \\ 1 & 6 & 3 & \lambda_2 \\ 3 & -2 & 1 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  是实数. 设  $L$  是以  $B$  为增广矩阵的线性方程组. 回答下列问题并说明理由:

- (i)  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  需要满足什么条件才能使得  $L$  是相容的?  
(ii) 是否存在  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  使得  $L$  是确定的?
4. 设线性方程组  $H$  有两组解  $x_1 = \alpha_1, \dots, x_n = \alpha_n$  和  $x_1 = \beta_1, \dots, x_n = \beta_n$ .

- (a) 若  $H$  是齐次的, 证明: 对任意实数  $u, v$ ,

$$x_1 = u\alpha_1 + v\beta_1, \dots, x_n = u\alpha_n + v\beta_n$$

也是  $H$  的解.

- (b) 若  $H$  是非齐次的, 证明: 对任意实数  $k$ ,

$$x_1 = \alpha_1 + k(\alpha_1 - \beta_1), \dots, x_n = \alpha_n + k(\alpha_n - \beta_n)$$

也是  $H$  的解.

5. 利用数学归纳法证明: 对任意正整数  $n$ ,

$$(1+h)^n \geq 1+nh, \quad \text{和} \quad \sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$