第二次作业

1. 设 $\theta, a, b \in \mathbb{R}$. 考虑线性方程组:

$$\begin{cases} \cos\theta\, x - \sin\theta\, y = a \\ \sin\theta\, x + \cos\theta\, y = b \end{cases}$$

   (a) 证明该方程组是确定的;

   (b) 设

$$\mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\},$$

   如果 α 和 β 不全为零, 则记 $\ell(\alpha, \beta)$ 是点 $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ 与原点 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 的连线. 计算 $\ell(u, v)$ 和 $\ell(a, b)$ 的夹角, 其中 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ 是上述方程组的解且 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

2. 设 $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$. 如果 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in S$ 在以原点为圆心的某个圆上, 则称 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 有关系 R. 记为 $\mathbf{u} R \mathbf{v}$.

   (a) 验证 R 是等价关系;

   (b) 设 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 由习题 1(b) 给出. 说明 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ 是否成立;

   (c) 设 $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$. 如果存在 $\theta \in \mathbb{R}$ 使得 $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ 是方程组

$$\begin{cases} \cos\theta\, x - \sin\theta\, y = e \\ \sin\theta\, x + \cos\theta\, y = f \end{cases}$$

   的解, 则称 $\begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$ 有关系 $\sim$. 证明: $\sim$ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的等价关系.

3. 设 $f:\ A \to B,\ g:\ B \to C$ 是两个映射. 证明:

   (a) 若 $g \circ f$ 是单射, 则 f 是单射;

   (b) 若 $g \circ f$ 是满射, 则 g 是满射.

4. 设 $f:\ A \to B$ 是映射, A_1, A_2 是 A 的子集, B' 是 B 的子集. 证明:

   (a) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$,

   (b) $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$, 且当 f 是单射时, $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$ 成立;

   (c) $f\left(f^{-1}\left(B'\right)\right) \subset B'$, 且当 f 是满射时, $f\left(f^{-1}\left(B'\right)\right) = B'$ 成立.