第四次作业

1. 判断以下置换的奇偶性:

   (a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 7 & 1 & 8 & 4 & 3 \end{pmatrix}$;

   (b) $(12)(34)(56)\cdots(\underline{2023}\,\underline{2024})$;

   (c) $\sigma_1\sigma_2$. 其中 $\sigma_1 \in S_n$ 为奇置换, $\sigma_2 \in S_n$ 为偶置换.

2. 设 $\sigma \in S_n$ 为置换.

   (a) 若 $\mathrm{ord}(\sigma)$ 为奇数, 证明 σ 为偶置换;

   (b) 当 $\mathrm{ord}(\sigma)$ 为偶数时, σ 是否一定为奇置换? 给出证明或举出反例.

3. (a) 验证公式: $(ij)(jk) = (ijk)$; $(ij)(kl) = (ikj)(ikl)$, 其中 i, j, k, l 为正整数;

   (b) 证明: 任何一个偶置换都可以写成一些三轮换的乘积. 这里的三轮换是指长度为 3 的循环.

4. (a) 求 $\gcd(51, 62), \mathrm{lcm}(51, 62)$, 并求两个整数 u, v, 使得 $51u + 62v = \gcd(51, 62)$;

   (b) 给定正整数 m, 求两个整数 u, v, 使得 $51u + 62v = m$.

5. 设 $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{N}^+$. $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的最大公因子是指能够整除每个 a_i 的最大正整数, 记为 $\gcd(a_1, a_2, \cdots, a_n)$. 证明:

   (a) $\gcd(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \gcd(\gcd(a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}), a_n)$;

   (b) 存在整数 $u_1, u_2, \cdots, u_n$, 使得 $u_1a_1 + u_2a_2 + \cdots + u_na_n = \gcd(a_1, a_2, \cdots, a_n)$.