

第五次作业

1. 计算线性组合 $3\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2 - 5\mathbf{v}_3$, 其中

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. 判断下述向量组是否线性无关

(1)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

3. 给定一个线性无关的向量组 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$. 判断向量组

$$\mathbf{w}_1 = 3\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_4, \mathbf{w}_2 = 2\mathbf{v}_1 + 5\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3 + 2\mathbf{v}_4, \mathbf{w}_3 = 3\mathbf{v}_1 + 4\mathbf{v}_2 + 2\mathbf{v}_3 + 3\mathbf{v}_4.$$

是否线性相关.

4. 证明: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^n$ 线性无关当且仅当 $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ 线性无关.

5. 设 $\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$ 且 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ 线性无关. 再设

$$\mathbf{w} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \dots + a_k\mathbf{v}_k,$$

其中 $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ 且 $a_1 \neq 0$. 证明: $\mathbf{w}, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ 线性无关.

6. 设 V, V_1, V_2 是 \mathbb{R}^n 的子空间. 举例说明

(1) $V \cap (V_1 + V_2) = V \cap V_1 + V \cap V_2$ 一般不成立.

(2) $V + V_1$ 是直和, $V + V_2$ 也是直和且 $V + V_1 = V + V_2$, 但 $V_1 \neq V_2$.