第六次作业

1. 设向量 $\boldsymbol{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{v}_3 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}$. 求 $\langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \rangle$ 的一组基.

2. 设向量 $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $V = \{\lambda \boldsymbol{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, 且 $W = \{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$. 则 V, W 都是 $\mathbb{R}^3$ 的子空间.

   (a) 求 W 的维数与一组基;

   (b) 证明 $W \oplus V = \mathbb{R}^3$;

   (c) 将 (a) 问中所得的 W 的基记为 $\{\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$, 证明: $\{\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\}$ 为 $\mathbb{R}^3$ 的一组基;

   (d) 设 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, 则存在唯一的实数 x, y, z, 使得 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = x\boldsymbol{v} + y\boldsymbol{w}_1 + z\boldsymbol{w}_2$. 求 x.

3. 设 V 为 $\mathbb{R}^n$ 的子空间, $\dim(V) = d$, 且 V 中有 t 个向量 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots \boldsymbol{v}_t$ 使得 $V = \langle \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots \boldsymbol{v}_t \rangle$. 证明: $t \geq d$, 且 $t = d$ 当且仅当 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots \boldsymbol{v}_t$ 线性无关.

4. (a) 求 $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ 的秩.

   (b) 设 $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. 求 $\begin{pmatrix} 1 & e & e \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ 的秩.

5. (a) 如何理解极大线性无关组、基和维数这些概念? 请用你自己的语言简要叙述.

   (b) 在命题 2.15 证明中, 你认为哪一步是最关键的?