

第七次作业

1. 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times k}$, $C \in \mathbb{R}^{s \times k}$. 证明:

$$(i) \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & O_{m \times k} \\ O_{s \times n} & C \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(C).$$

$$(ii) \operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & B \\ O_{s \times n} & C \end{pmatrix} \geq \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(C).$$

2. 设 A 和 B 是实数域上的有相同行数的矩阵. 证明:

$$\operatorname{rank} \begin{pmatrix} A & B \\ 2A & -5B \end{pmatrix} = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

3. 计算下列齐次线性方程组 H

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{cases}$$

解空间的一组基.

4. 求出下列线性方程组 L

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7 \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9 \\ \lambda x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11 \end{cases}$$

与参数 λ 的值对应的解流形.

5. 在下述 \mathbb{R}^n 到 \mathbb{R}^n 的映射中, 哪些是线性映射:

$$(i) [x_1, x_2, \dots, x_n] \mapsto [x_n, x_2, \dots, x_1];$$

$$(ii) [x_1, x_2, \dots, x_n] \mapsto [x_1, x_2^2, \dots, x_n^n];$$

$$(iii) [x_1, x_2, \dots, x_n] \mapsto [x_1, x_1 + x_2, \dots, x_1 + x_2 + \dots + x_n];$$

其中 $[x_1, \dots, x_n]$ 代表列向量 $(x_1, \dots, x_n)^t$.