第八次作业

1. 设 $\mathbb{R}^4$ 中的标准基为 $\boldsymbol{e}_i,\ i=1,2,3,4$. 线性映射 $\phi:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ 由如下关系给出:

$$\begin{cases}\phi(\boldsymbol{e}_1)=3\boldsymbol{e}_1-5\boldsymbol{e}_2+\boldsymbol{e}_3\\ \phi(\boldsymbol{e}_2)=-2\boldsymbol{e}_1+7\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_4\\ \phi(\boldsymbol{e}_3)=-\boldsymbol{e}_1-6\boldsymbol{e}_3+4\boldsymbol{e}_4\\ \phi(\boldsymbol{e}_4)=2\boldsymbol{e}_2+3\boldsymbol{e}_3-\boldsymbol{e}_4\end{cases}.$$

   (a) 求 ϕ 在 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 下的矩阵, 并求 $\ker(\phi),\mathrm{im}(\phi)$ 的维数与一组基;

   (b) 求 $\phi\circ\phi$ 在 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4;\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3,\boldsymbol{e}_4$ 下的矩阵.

2. 计算以下情景时的 AB,BA 以及 $\mathrm{rank}(AB),\mathrm{rank}(BA)$.

   (a) $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$, 其中 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$;

   (b) $A=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -1\\ -2 & -1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

3. 设映射 $T:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ (x,y)\mapsto(x+1,y)$ 为平移映射. 对于以下四种方式给出的子集 $S\subseteq\mathbb{R}^2$, 分别判断: 是否存在线性映射 $\phi:\ \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 使得 $\phi(S)=T(S)$.

   (a) $S:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,x-2=y-1,\ 1\le x\le 2\}$;

   (b) $S:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,(x-2)^2=y-1\}$;

   (c) $S:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,(x-2)^2=(y-1)^2\}$;

   (d) $S:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,|\,(x-2)^2+(y-1)^2=1\}$.

4. 设 $A,B,C\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 证明:

$$\mathrm{rank}(A+B+C)\le\mathrm{rank}(A+B)+\mathrm{rank}(B+C)+\mathrm{rank}(C+A).$$

5. 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 证明: $\mathrm{rank}(A)\le 1$ 当且仅当存在实数 $a_1,a_2,\cdots,a_m,b_1,b_2\cdots,b_n$ 使得:

$$A=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_m\end{pmatrix}(b_1\ b_2\ \cdots\ b_n).$$