

第九次作业

1. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

计算: A^2, A^3 , 并求对任意 $k \in \mathbb{Z}^+$, A^k 的表达式.

2. 设 $a, b, c \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{Z}^+$, 证明

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^m = \begin{pmatrix} 1 & ma & \frac{m(m-1)}{2}ab + mc \\ 0 & 1 & mb \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. 证明: 任意一个 n 阶实数方阵都可以写成一个 n 阶对称矩阵和一个 n 阶斜对称矩阵的和.

4. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ 是对称矩阵. 证明以下结论:

- (1) AB 是对称矩阵当且仅当 $AB = BA$,
- (2) 如果 A 是可逆矩阵, 则 A^{-1} 也是对称矩阵.

5. 求所有 n 阶矩阵 A 使得对于任意 n 阶矩阵 X 都有 $\text{tr}(AX) = 0$.

6. 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times s}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{s \times n}$. 证明: 如果 $AB = O_{m \times n}$, 则 $\text{rank}(A) + \text{rank}(B) \leq s$.