

第十次作业

1. 将 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ 写成一些初等矩阵的乘积.

2. 求以下矩阵的逆:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; (b) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(c) \begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}, \text{ 其中 } A \in M_m(\mathbb{R}), B \in M_n(\mathbb{R}) \text{ 均可逆.}$$

3. 设 $A \in M_m(\mathbb{R}), B \in M_n(\mathbb{R}), C \in \mathbb{R}^{m \times n}, X = \begin{pmatrix} A & C \\ O_{n \times m} & B \end{pmatrix}$, 满足 $XX^t = X^tX$.

(a) 证明 $\text{tr}(C^tC) = 0$;

(b) (选做) 证明 $C = O$.

4. 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \text{rank}(A) = r$. 证明: A 可以写成 r 个秩为 1 的矩阵的和, 且不能写成 $r-1$ 个秩为 1 的矩阵的和. (提示: 打洞引理和常见的秩不等式可能会有帮助)

5. 设 A, B 为 n 阶方阵, 证明: $\text{rank}(E_n - AB) \leq \text{rank}(E_n - A) + \text{rank}(E_n - B)$.

建议用以下两种不同的方法做第 5 题:

(a) 利用矩阵分块;

(b) 把上述秩关系通过对偶定理转换为

$$(E_n - AB)\mathbf{x} = \mathbf{0}, (E_n - A)\mathbf{x} = \mathbf{0}, (E_n - B)\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

的解空间的维数的关系.
