第十二次作业

1. 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$. 证明:

   (a) $(\lambda A)^\vee = \lambda^{n-1} A^\vee$, $|A^\vee| = |A|^{n-1}$;

   (b) $\mathrm{rank}(A^\vee) = \begin{cases} n, & 若\ \mathrm{rank}(A) = n; \\ 1, & 若\ \mathrm{rank}(A) = n-1; \\ 0, & 若\ \mathrm{rank}(A) < n-1. \end{cases}$

2. 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$.

   (a) 若 A 可逆, 证明 $(A^\vee)^\vee = |A|^{n-2} A$;

   (b) (选做) 证明 $(A^\vee)^\vee = |A|^{n-2} A$.

3. (a) 若 $ad - bc \neq 0$, 用 $Cramer$ 法则求 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 的逆;

   (b) 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ 互不相同, $y_1, y_2, \cdots, y_n \in \mathbb{R}$. 证明: 存在唯一一个次数小于 n 的多项式 $f(x)$ 使得 $f(x_i) = y_i$, $i = 1, \cdots, n$.

   注: 多项式是指形如 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$ 的函数.

4. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为 n 个互不相同的实数, 令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n \\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \cdots & \alpha_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-2} & \alpha_2^{n-2} & \cdots & \alpha_n^{n-2} \end{pmatrix}$. 求以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组的解空间.

5. 求 $\mathbb{Z}_{22}$ 中所有关于乘法可逆元它们的逆.

6. (a) 设 $S := \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, \det(A) > 1\}$. 证明 S 在矩阵乘法下构成一个半群.

   (b) 设 $T := \{A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R}) \,|\, \det(A) < 1\}$. T 关于矩阵乘法是否构成半群? 请说明理由.