第十三次作业

1. 设 G 是实数对 $(a,b), a\neq 0$ 的集合, 在 G上定义乘法 $\circ$

$$(a,b)\circ(c,d)=(ac,ad+b).$$

   证明 $(G,\circ)$ 是群.

2. 科斯特利金-代数学引论(第一卷)第 128 页第 7 题.

3. 科斯特利金-代数学引论(第一卷)第 128 页第 15 题.

4. 设 G, H 为两个群,单位元分别为 e_G, e_H, 设 $\phi: G\to H$ 为群同态, 记

$$\ker(\phi)=\{g\in G|\phi(g)=e_H\}.$$

   证明:

   (1) $\ker(\phi)$ 为 G 的一个子群;

   (2) $g\ker(\phi)=\ker(\phi)g$ 对任意 $g\in G$ 成立, 其中

$$g\ker(\phi)=\{gg'|g'\in\ker(\phi)\},\ \ker(\phi)g=\{g'g|g'\in\ker(\phi)\};$$

   (3) ϕ 是单射当且仅当 $\ker(\phi)=\{e_G\}$.

5. 证明有限群 G 的阶 $|G|$ 为偶数当且仅当 G 中包含有一个二阶元 $g\neq e$.

6. (选做)设 A, B 分别是群 G 的两个子群, 证明:

   (1) $A\bigcup B$ 是 G 的子群当且仅当A是B的子群或者B是A的子群;

   (2) 群 G 不能表示成两个真子群的并. (注: 利用(1).)