第十四次作业

1. (a) 写出群 $(\mathbb{Z}_{12}, +, \bar{0})$ 的所有子群;

   (b) 计算 $11^{1752} \pmod{71}$ (提示: 利用 Fermat 小定理);

   (c) 证明 $\mathbb{Z}_{13}$ 中的乘法可逆元关于乘法构成循环群 (提示: 计算 $\bar{2}$ 的阶).

2. 设 $(R, +, 0, \cdot, 1)$ 为一个环, $u \in R$. 若存在 $v \in R$ 使得 $uv = 1$, 我们称 u 有右逆. 设 u 有右逆, 证明以下命题等价:

   (a) u 不是 R 中的可逆元;

   (b) u 有多于一个右逆;

   (c) u 为左零因子.

3. 设 $(R, +, 0, \cdot, 1)$ 为一个环, $a, b \in R$. 证明:

   (a) 若存在 $n \in \mathbb{N}$ 使得 $a^n = 1$, 则 $1 - a$ 可逆;

   (b) (选做) 若 $1 - ab$ 可逆, 则 $1 - ba$ 可逆.

4. 证明: 含有有限个元素的整环是域.

5. 设 $A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_3(\mathbb{Z}_3)$.

   (a) 求线性方程组 $A\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ 的解空间;

   (b) 求 A 的列空间中所含向量的个数.

6. 设线性映射 $\phi : \mathbb{Z}_5^3 \to \mathbb{Z}_5^2$ 由

$$\phi(\mathbf{e}_1) = \epsilon_1 - \bar{2}\epsilon_2,\ \phi(\mathbf{e}_2) = \epsilon_1 + \bar{3}\epsilon_2,\ \phi(\mathbf{e}_3) = \mathbf{0}_2$$

   确定, 其中 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 是 $\mathbb{Z}_5^3$ 的标准基, ϵ_1, ϵ_2 是 $\mathbb{Z}_5^2$ 的标准基.

   (a) 写出 ϕ 在 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3; \epsilon_1, \epsilon_2$ 下的矩阵.

   (b) 计算 $\dim(\ker(\phi))$ 的维数和 $\mathrm{im}(\phi)$ 的一组基.