第十五次作业

1. 设 $f = x^3 - x + \bar{2}$ 和 $g = \bar{2}x^2 + x$ 是 $\mathbb{Z}_3[x]$ 中的两个多项式. 计算 $\mathrm{quo}(f, g, x)$ 和 $\mathrm{rem}(f, g, x)$.

2. 科斯特利金-代数学引论(第一卷)第 161 页第 1 题.

3. 设 $f(x) = x^2 + 2x - 3 \in \mathbb{Z}[x]$ 分别求

   (a) $f(3) \in \mathbb{Z}$;

   (b) $f(\bar{5})$, 其中 $\bar{5} \in \mathbb{Z}_7$;

   (c) $f(A)$, 其中 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. 多项式 $x^2 - 2$ 在 $\mathbb{Z}_{16}$ 中有多少个根?

5. 设 $\mathbb{F}$ 是域

   (a) 设 $a, b \in \mathbb{F}$ 且 $a \neq 0$. 证明: 映射

   $$\begin{aligned} \phi_{a,b} : \mathbb{F}[x] &\to \mathbb{F}[x] \\ p(x) &\mapsto p(ax + b) \end{aligned}$$

   是从 $\mathbb{F}[x]$ 到 $\mathbb{F}[x]$ 的环同构.

   (b) 设 $\sigma : \mathbb{F}[x] \to \mathbb{F}[x]$ 是环同构且 $\sigma|_{\mathbb{F}} = \mathrm{id}_{\mathbb{F}}$. 证明: 存在 $a, b \in \mathbb{F}$ 且 $a \neq 0$ 使得 $\sigma = \phi_{a,b}$.

6. 设域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵

   $$A = \begin{pmatrix} k & c & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & k & c & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & k & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k \end{pmatrix},$$

   其中 $k, c \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, 求 A^{-1}.
   (提示: 考虑一元多项式环 $\mathbb{F}[x]$. 令 $A = kE + cH$, 利用上次作业 3 (a).)