第一次作业

1. 设
$$f=(x_1x_2-1)^2+(x_3x_4+1)^2+2x_1x_2\in\mathbb{Q}[x_1,x_2,x_3,x_4].$$
计算 f 的总次数和齐次加法分解.

2. 设 D 是整环, $D^*=D\setminus\{0\}$, $a,b_1,\dots,b_k\in D^*$. 定义:

   (i) 如果 $b_1\mid a,\dots,b_k\mid a$, 则称 a 是 $b_1,\dots,b_k$ 的**公倍式**.

   (ii) 设 ℓ 是 $b_1,\dots,b_k$ 的公倍式且对于 $b_1,\dots,b_k$ 任意公倍式 a 都有 $\ell\mid a$, 则称 ℓ 是 $b_1,\dots,b_k$ 的**最小公倍式**.

   证明:

   (a) 如果 ℓ 是 $b_1,\dots,b_k$ 的最小公倍式且 $m\in D^*$. 则 m 是 $b_1,\dots,b_k$ 的最小公倍式当且仅当 $\ell\approx m$.

   (b) 如果 $f,g\in F[x]\setminus\{0\}$, 其中 F 是域, 且 h 是 f 和 g 的次数最小的公倍式, 则 h 是 f 和 g 的最小公倍式.

3. 设 $f=x^3+2x^2+2x+1$ 和 $g=x^2+2x$.

   (i) 把 f 和 g 看成 $\mathbb{Q}[x]$ 中的多项式, 求 $\gcd(f,g)$.

   (ii) 把 f 和 g 看成 $\mathbb{Z}_3[x]$ 中的多项式, 求 $\gcd(f,g)$.

4. 设 F 是域, $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$ 是 F^2 的标准基，线性映射 $\mathcal{A}:F^2\to F^2$ 由 $\mathcal{A}(\mathbf{e}_1)=\mathbf{e}_2$ 和 $\mathcal{A}(\mathbf{e}_2)=-\mathbf{e}_1$ 确定. 求非零多项式 $f(t)\in F[t]$ 使得 $f(\mathcal{A})=\mathcal{O}$, 其中 $\mathcal{O}$ 代表从 F^2 到 F^2 的零线性映射.

5. 设 $A\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 满足 $A^3=E$. 证明: $\mathrm{rank}(A-E)+\mathrm{rank}(A^2+A+E)=n$.