第二次作业

1. 设 $n = 3626$ 和 $f = x^7 - 2x^6 + 3x^5 - 2x^4 + x^3 \in \mathbb{Q}[x]$

   (i) 计算 2, 7 和 13 在 n 中的重数.

   (ii) 计算 x, $x-1$ 和 $x^2 - x + 1$ 在 f 中的重数.

2. 设 D 是唯一因子分解整环, $a, b \in D^*$. 设

$$a = u p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k} \quad \text{和} \quad b = v p_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k},$$

   其中 $u, v \in U_D$, $p_1, \ldots, p_k$ 是 D 中两两互不相伴的不可约元, $m_i, n_i \in \mathbb{N}$, $i = 1, \ldots, k$. 证明:

$$\operatorname{lcm}(a, b) = p_1^{\max(m_1, n_1)} \cdots p_k^{\max(m_k, n_k)} \quad \text{和} \quad \operatorname{lcm}(a, b) = \frac{ab}{\gcd(a, b)}.$$

3. 判断下列多项式在相应的环中是否不可约. 如果可约，计算其不可约分解.

   (i) $x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]$, $x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$.

   (ii) $x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_3[x]$, $x^3 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]$.

   (iii) $2x^8 - 6x + 3 \in \mathbb{Q}[x]$.

4. 设 D 是唯一因子分解整环, $a, b \in D^*$ 且 $\gcd(a, b) = 1$. 证明: $\gcd(a+b, ab) = 1$.

5. (选做) 设 F 是域， $\mathcal{A} : F^n \to F^n$ 是非零线性映射, $f \in F[t] \setminus \{0\}$, 且 $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$. 证明: 如果 t 在 $f(t)$ 中的重数小于 2, 则

$$F^n = \ker(\mathcal{A}) \oplus \operatorname{im}(\mathcal{A}).$$

   提示: 当重数为 0 时，证明 $\mathcal{A}$ 可逆. 当重数为 1 时，利用核核分解定理.