第三周习题

1. 设 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$，证明：$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$，并说明其几何意义.

2. 求多项式 $x^4+x^3+x^2+x+1$ 在有理数域，实数域，复数域的不可约分解.

3. 设 m, n 为正整数. 证明: 在有理数域上，$\gcd(x^m-1, x^n-1)=x^{\gcd(m,n)}-1$.

4. 设 $z_1=\sqrt{5}+\sqrt{-5}$, $z_2=\sqrt{5}-\sqrt{-5}$.

   (i) $z_1, z_2, 1$ 在实数域上是否线性相关?

   (ii) $z_1, z_2, 1$ 在有理数域上是否线性相关?

   请说明理由.

5. 判断下列 $\mathbb{R}[x]$ 的子集是否为子空间：
   （1）对给定的正整数 n, 次数小于 n 的实系数多项式全体.
   （2）对给定的正整数 n, 次数大于 n 的实系数多项式全体.
   （3）对给定的实数 a, 满足条件 $f(a)=0$ 的实系数多项式 $f(x)$ 全体.
   （4）对给定的实数 a, 满足条件 $f(a)\neq 0$ 的实系数多项式 $f(x)$ 全体.
   （5）满足条件 $f(x)=f(-x)$ 的实系数多项式 $f(x)$ 全体.

6. (选做) 设 F 是域, $f_1, f_2, \cdots, f_n \in F[x]$. 证明: $f_1, f_2, \cdots, f_n$ 线性无关当且仅当 $\exists\, a_1, a_2, \cdots, a_n \in F$, 使得 $\det((f_i(a_j))_{n\times n}\neq 0$.