第四周习题

1. 设 U 是域 F上 n 阶斜对称矩阵构成的线性空间. 计算 $\dim_F(U)$.
   (提示：分 $\mathrm{char}(F)\neq 2$ 和 $\mathrm{char}(F)=2$ 两种情形)

2. 设 P_n 是 $\mathbb{R}[x]$ 中次数不超过 $n-1$ 的多项式全体组成的线性空间.定义

$$\begin{aligned}\phi:\quad P_n &\longrightarrow \quad P_n\\ u(x) &\longmapsto \quad xu'(x)-u(x),\end{aligned}$$

   证明：ϕ 是线性映射，并求其核空间的一组基.

3. 把复数域 $\mathbb{C}$ 看成有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的线性空间. 设

$$U=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}\quad V=\{a+b\sqrt{-1}\mid a,b\in\mathbb{Q}\}$$

   验证 U 和 V 是$\mathbb{C}$ 的子空间，并计算 $\dim_{\mathbb{Q}}(U+V)$.

4. 设 W_1,W_2 为 V 的子空间，$\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\in V$，使得 $\mathbf{v}_1+W_1=\mathbf{v}_2+W_2$,
   证明: $W_1=W_2$.

5. 设域 F 的特征为 0,
   (i) V_1,V_2 是域 F 上的线性空间 V 的两个真子空间. 证明：在 V 中存在 v, 使得 $\mathbf{v}\notin V_1,\mathbf{v}\notin V_2$ 同时成立.

   (ii) (选做) 域 F 上的线性空间不能表示成有限个真子空间的并.