第五周习题

1. 判断下列两组向量是不是 $\mathbb{R}^3$ 的基，若不是，求其张成线性空间维数. 若都是，求第一组基到第二组基的转换矩阵.

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. 设 $V = \mathbb{R}[x]^{(n)}$. 对$i = 0, 1, \cdots, n$，定义：

$$\begin{array}{rccc} \phi_i: & V & \to & \mathbb{R} \\ & f & \mapsto & \frac{1}{i!}\frac{d^i f}{dx^i}(0) \end{array}.$$

验证 $\phi_0, \phi_1, \cdots, \phi_{n-1}$ 是 $1, x, \cdots, x^{n-1}$的对偶基.

3. 设$\mathbb{R}$上的双线性型由公式

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1y_1 - 3x_2y_3 + 2x_4y_1 + 5x_3y_2 - x_4y_4$$

定义，其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$ 和 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)^t$. 求 f 在标准基下的矩阵和秩.

4. 设 $A \in F^{m\times n}, B \in F^{n\times m}$，其中 F 是域.证明：

$$m - \operatorname{rank}(E_m - AB) = n - \operatorname{rank}(E_n - BA).$$

5. （选做）设 $a_1, a_2, \cdots, a_n \in F$ 互不相同，F 为域. 定义：

$$\begin{array}{rccc} T_{a_i}: & F[x]^{(n)} & \to & F \\ & f(x) & \mapsto & f(a_i) \end{array}.$$

(i) 证明 $T_{a_i}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 为 $(F[x]^{(n)})^*$ 的一组基.

(ii) 求 $F[x]^{(n)}$ 的一组基使得这组基的对偶基为 T_{a_i}, $i = 1, 2, \cdots, n$.

(iii) 求 $F[x]^{(n)}$ 的基 $1, x, \cdots, x^{n-1}$ 到上述基的转换矩阵.