第六周习题

1. 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

   计算 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$ 和对角矩阵 B 使得 $P^tAP = B$.

2. 证明任意秩为 r 的对称阵可以写为 r 个秩为 1 的对称阵之和.

3. 化实二次型为规范型 (不必求坐标变换)

   (a) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$,

   (b) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4$,

   (c) $\sum_{i=1}^n (\sum_{1 \le j \ne i \le n} x_j)^2$.

4. 设 V 是域 F 上的有限维线性空间，$g, h \in V^*$. 函数 $f : V \times V \longrightarrow F$ 由公式

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g(\mathbf{x})h(\mathbf{y})$$

   定义.

   (i) 验证 $f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ 是双线性型;

   (ii) 计算 $\mathrm{rank}(f)$;

   (iii) 验证 $q(\mathbf{x}) = g^2(\mathbf{x})$ 是 V 上的二次型.

5. (选做) 设 V 是F 上的 n 维线性空间，U 是 V 的 d 维子空间. 设

$$U^0 = \{f \in V^* | \, \forall \, \mathbf{u} \in U, \; f(\mathbf{u}) = 0\},$$

   证明：$\dim(U^0) = n - d$.