

第七周习题

1. 设 $q(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_2x_3$ 是 $\mathbb{R}$ 上二次型, 计算 q 的签名.

2. 设

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{SM}_2(\mathbb{R}).$$

(i) 是否存在 $P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$, 使得 $S = P^t P$? 如果存在, 计算 P .

(ii) 是否存 $P \in \text{GL}_2(\mathbb{C})$, 使得 $S = P^t P$? 如果存在, 计算 P .

3. 设 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, 证明

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum_{i=1}^n a_i b_i \\ \sum_{i=1}^n a_i b_i & \sum_{i=1}^n b_i^2 \end{pmatrix}$$

半正定, 并以此证明 Cauchy 不等式.

4. 任取 $A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$, 证明存在 $t > 0$ 使得 $tE + A$ 正定.

5. 实二次型

$$\lambda x_1^2 - 2x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3,$$

在 λ 取何值时是负定的?.

6. (选做) 设 V 是 n 维实空间, $f_1, f_2, \dots, f_{s+t} \in V^*$. 证明:

$$q = f_1^2 + \dots + f_s^2 - f_{s+1}^2 - \dots - f_{s+t}^2$$

是二次型. 再设 k 是 q 的正惯性指数. 证明 $k \leq s$.