

第八周习题

1. 试举例说明:

(i) 正定矩阵在 $(a_{i,j})_{n \times n}$ 在某些 (i, j) 处的值可以是负的.

(ii) 实对称矩阵 $A = (a_{i,j})_{n \times n}$ 所有元素均为正, A 不一定正定.

2. 设 $B \in \text{SM}_{n-1}(\mathbb{R})$ 正定, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-1}$, 且 $a \in \mathbb{R}$. 令

$$A = \begin{pmatrix} B & \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^t & a \end{pmatrix}.$$

证明: 如果 $\det(A) = 0$, 则 A 半正定.

3. 讨论下列二次曲面类型

(i) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0$.

(ii) $x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + x_1 + 2x_2 - 4 = 0$.

4. 设 $A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$ 正定, $K \in \text{SSM}_n(\mathbb{R})$. 证明: $\det(A + K) > 0$.

5. (选做) 讨论平面与圆锥面 $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ 的交线类型.