第九周习题

1. 设 V 的一组基是 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, W$ 的一组基是 ϵ_1, ϵ_2. 线性映射 ϕ 由

$$\phi(\mathbf{e}_1) = \epsilon_1 - \epsilon_2, \quad \phi(\mathbf{e}_2) = \epsilon_1 + \epsilon_2, \quad \phi(\mathbf{e}_3) = \epsilon_2 - 2\epsilon_1.$$

   确定.
   (i) 计算 ϕ 在上述基底下的矩阵;
   (ii) 计算 $\mathrm{rank}(\phi)$ 和 $\ker(\phi)$ 的一组基;
   (iii) 设 $\mathbf{v}_1 = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{v}_2 = 2\mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3, \mathbf{v}_3 = \mathbf{e}_1; \mathbf{w}_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \mathbf{w}_2 = \epsilon_1 + \epsilon_2$.

   - 证明： $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 是V 的一组基，
   - 证明： $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$是$W$ 的一组基，
   - 计算 ϕ 在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3; \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 下的矩阵.

2. 设 $C \in \mathrm{GL_n}(F)$, $\mathcal{A} : \mathrm{M_n}(F) \longrightarrow \mathrm{M_n}(F)$ 由公式 $\mathcal{A}(X) = C^{-1}XC$ 给出.
   (i) 验证 $\mathcal{A}$ 是 $\mathrm{M}_n(F)$ 上的线性算子.
   (ii) 验证对任意 $X, Y \in \mathrm{M}_n(F), \mathcal{A}(XY) = \mathcal{A}(X)\mathcal{A}(Y)$.
   (iii) 求 rank(A).

3. 设 A 可逆. 证明: AB与BA相似。

4. 设 $\dim V = n$, $\mathcal{A}$ 为 V 上的线性算子. 证明下列等价：

   (i) $\mathcal{A} \in \langle \mathcal{E}_V \rangle$ (恒同算子 $\mathcal{E}_V$ 生成的线性子空间);
   (ii) $\mathcal{AB} = \mathcal{BA}, \forall \mathcal{B} \in \mathcal{L}(V)$;
   (iii) $\mathcal{A}$在任意基下的矩阵都相同。

5. 设 $\dim V = n$, $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V), \mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v}, \mathcal{A}(\mathbf{v}), ..., \mathcal{A}^{n-1}(\mathbf{v})$ 线性无关.

   (1) 证明 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

   (2) 证明 $\mathbb{R}[x]^{(n)}$上求导算子在一组基下的矩阵为 J;
   (3) 证明 J 与 J^t 相似;