

第十周习题

1. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 满足 $\mathcal{A}^2 = 2\mathcal{A} - \mathcal{E}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

且 $f = t^2 - 2 \in F[t]$.

(i) 计算 $\alpha, \beta \in F$ 使得 $f(\mathcal{A}) = \alpha\mathcal{A} + \beta\mathcal{E}$;

(ii) 计算 $f(B)$ 和 μ_B .

2. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, 矩阵 A 是 \mathcal{A} 在 V 的某组基下的矩阵, $f \in F[t]$, 其中 F 是 V 的基域. 证明:

(i) $f(\mathcal{A}) = \mathcal{O} \iff f(A) = O$;

(ii) $\mu_{\mathcal{A}} = \mu_A$.

3. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$. 证明: V 的子空间都是 \mathcal{A} -不变的当且仅当 \mathcal{A} 是数乘算子.