第二章　矩阵

1　线性相关性

1.1　坐标空间

设
$$\mathbb{R}^{n\times 1}=\{\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\mid x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}\}.$$
称为 n 维列向量(坐标)空间. 设
$$\mathbb{R}^{1\times n}=\{(x_1,\ldots,x_n)\mid x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}\}.$$
称为 n 维行向量(坐标)空间. 这学期我们通常在列空间中描述线性代数的内容. 于是, 记 $\mathbb{R}^{n\times 1}$ 为 $\mathbb{R}^n$, 其中的元素称为向量. 特别地
$$\mathbf{0}_n=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n.$$
称为 $\mathbb{R}^n$ 中的零向量. 当 n 从上下文可确定时, $\mathbf{0}_n$ 记为 $\mathbf{0}$.

设
$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad \mathbf{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$$

是 $\mathbb{R}^n$ 中的向量. 我们定义

$$\mathbf{x}+\mathbf{y}:=\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}.$$

则向量的加法满足下列规律: $\forall \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in\mathbb{R}^n$,

(i) (交换律) $\mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{y}+\mathbf{x}$;

(ii) (结合律) $(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\mathbf{z}=\mathbf{x}+(\mathbf{y}+\mathbf{z})$;

(iii) (加法单位元) $\mathbf{x}+\mathbf{0}=\mathbf{x}$;

(iv) (加法逆) $\mathbf{x}+(-\mathbf{x})=\mathbf{0}$, 其中 $-\mathbf{x}$ 是把 $\mathbf{x}$ 中每个坐标反号后得到的向量.

再设 $\lambda\in\mathbb{R}$. 我们定义数乘

$$\lambda\mathbf{x}:=\begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

则“标量”与向量的数乘满足下列规律: $\forall \lambda,\mu\in\mathbb{R},\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$,

(i) $(\lambda\mu)\mathbf{x}=\lambda(\mu\mathbf{x})$;

(ii) $1\mathbf{x}=\mathbf{x}$.

进而, 加法和数乘满足下列分配律： $\forall \lambda,\mu\in\mathbb{R},\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$,

(i) $\lambda(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}$;

(ii) $(\lambda+\mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$.

例 1.1 设

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

则

$$2\mathbf{x} + 3\mathbf{y} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

例 1.2 设以 $x_1, \ldots, x_n$ 为实未知数的线性方程组的增广矩阵是 $B = (A|\mathbf{b})$, 其中 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. 则该方程组可以表示为

$$x_1\vec{A}^{(1)} + \cdots + x_n\vec{A}^{(n)} = \mathbf{b}.$$

1.2　线性组合，线性相关和线性无关

1.2.1　线性组合

定义 1.3 设 $\mathbf{w}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$. 如果存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{w} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k,$$

则称 $\mathbf{w}$ 是 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ （在 $\mathbb{R}$ 上）的线性组合.

当 $\mathbf{w}=\alpha\mathbf{v}$, 其中 $\alpha\in\mathbb{R}$, 我们说 $\mathbf{w}$ 和 $\mathbf{v}$ “平行”. 特别地, $\mathbf{0}_n$ 与 $\mathbb{R}^n$ 中的向量都平行.

例 1.4 设 $\mathbf{w},\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k\in\mathbb{R}^n$. 则 $A=(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k)\in\mathbb{R}^{n\times k}$ 和 $B=(A|\mathbf{w})\in\mathbb{R}^{n\times(k+1)}$. 根据例 *1.2*, 以 B 为增广矩阵的 k 元线性方程组相容当且仅当 $\mathbf{w}$ 是 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 的线性组合.

例 1.5 设

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\quad \mathbf{y}=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \mathbf{z}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

判定 $\mathbf{z}$ 是不是 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 的线性组合.

解. 考虑增广矩阵

$$B=(\mathbf{x},\mathbf{y}|\mathbf{z})=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\3&0&1\end{pmatrix}.$$

由 *Gauss* 消去法可知,

$$B=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&1\\3&0&1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-3&-1\\0&-3&-2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-3&-1\\0&0&-1\end{pmatrix}.$$

于是, B 对应的线性方程组不相容. 故 $\mathbf{z}$ 不是 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 的线性组合 *(第一章第一讲定理 2.5)*.

记号. 在 $\mathbb{R}^n$ 中,

$$\mathbf{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \ldots,\ \mathbf{e}_n := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

注解 1.6 对任意

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

我们有 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$. 即 $\mathbb{R}^n$ 中的任意向量都是 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ 的线性组合.

例 1.7 *(线性组合的传递性)* 设向量 $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}_1$, $\ldots$, $\mathbf{v}_k$, $\mathbf{w}_1$, $\ldots$, $\mathbf{w}_\ell$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中. 如果 $\mathbf{u}$ 是 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 的线性组合且每个 $\mathbf{v}_i$ 都是 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_\ell$ 的线性组合, 则 $\mathbf{u}$ 也是 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_\ell$ 的线性组合.

证明. 设 $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathbf{v}_i$ 和 $\mathbf{v}_i = \sum_{j=1}^{\ell} \beta_{i,j}\mathbf{w}_j$, 其中 $\alpha_i, \beta_{i,j} \in \mathbb{R}$. 则 $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \left(\sum_{j=1}^{\ell} \beta_{i,j}\mathbf{w}_j\right) = \sum_{j=1}^{\ell} \left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i\beta_{i,j}\right)\mathbf{w}_j$. 故 $\mathbf{u}$ 是 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_\ell$ 的线性组合. $\square$

1.2.2 线性相关和线性无关

定义 1.8 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$. 如果存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, 不全为零, 使得

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

则称 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$（在 $\mathbb{R}$）上线性相关. 否则, 我们称 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$（在 $\mathbb{R}$）上线性无关.

由上述定义可知, 一个向量 $\mathbf{v}$ 线性相关当且仅当 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. 如果 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 中有一个零向量, 则它们必然线性相关. 两个向量线性无关当且仅当它们不平行.

例 1.9 设 $A = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k) \in \mathbb{R}^{n \times k}$. 根据例 *1.2*, 以 A 为系数矩阵的 k 元齐次线性方程组有非平凡解当且仅当 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 的线性相关.

例 1.10 设

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

判定 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ 是否线性相关.

解. 设 $A = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$. 由 *Gauss* 消去法可知

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & -3 & -9 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是, 以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组有非平凡解. 故 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ 线性相关 *(第一章第一讲定理 2.7)*.

例 1.11 证明: $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$ 线性无关.

证明. 设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ 使得 $\alpha_1\mathbf{e}_1 + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$. 则

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

故 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 线性无关.

下面的命题总结了关于线性组合、线性相关和无关的基本事实.

命题 1.12 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^n$.

(i) 如果存在 $i \in \{1, \ldots, k\}$ 使得 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i$ 线性相关, 则 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k$ 也线性相关;

(ii) 如果 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k$ 线性无关, 则对任意 $i \in \{1, \ldots, k\}$ 使得 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i$ 也线性无关;

(iii) 向量 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 线性相关当且仅当这些向量中的某个向量是其它向量的线性组合;

(iv) 再设 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 且 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 线性无关. 则 $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 线性相关当且仅当存在唯一的 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k.$$

证明. (i) 因为 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i$ 线性相关, 所以存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_i \in \mathbb{R}$, 不全为零, 使得

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}.$$

于是,

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_i \mathbf{v}_i + 0 \mathbf{v}_{i+1} + \cdots + 0 \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

因为在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_i$ 中已有非零实数, 所以 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_i, \ldots, \mathbf{v}_k$ 线性相关.

(ii) 是 (i) 的逆否命题.

(iii) 设向量 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 线性相关. 则存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, 不全为零, 使得

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

不妨设 $\alpha_1 \neq 0$. 则

$$\mathbf{v}_1 = -(\alpha_1^{-1} \alpha_2) \mathbf{v}_2 - \cdots - (\alpha_1^{-1} \alpha_n) \mathbf{v}_n.$$

反之不妨设 $\mathbf{v}_k$ 是 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{k-1}$ 的线性组合. 则存在 $\beta_1, \ldots, \beta_{k-1} \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{v}_k = \beta_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_{k-1} \mathbf{v}_{k-1}.$$

于是, $\beta_1\mathbf{v}_1+\cdots+\beta_{k-1}\mathbf{v}_{k-1}+(-1)\mathbf{v}_k=\mathbf{0}$. 故 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_{k-1},\mathbf{v}_k$ 线性相关.

(iv) 设 $\mathbf{v},\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 线性相关. 则存在 $\beta,\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{R}$, 不全为零, 使得

$$\beta\mathbf{v}+\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{v}_k=\mathbf{0}.$$

则 $\beta\neq 0$. 否则, 我们有 $\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{v}_k=\mathbf{0}$ 且 $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ 不全为零. 从而推出 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 线性相关, 矛盾. 故

$$\mathbf{v}=-(\beta^{-1}\alpha_1)\mathbf{v}-\cdots-(\beta^{-1}\alpha_k)\mathbf{v}_k.$$

再设 $\mathbf{v}=\lambda_1\mathbf{v}_1+\cdots+\lambda_k\mathbf{v}_k=\mu_1\mathbf{v}_1+\cdots+\mu_k\mathbf{v}_k$. 其中 $\lambda_1,\ldots,\lambda_k,\mu_1,\ldots,\mu_k\in\mathbb{R}$. 则

$$(\lambda_1-\mu_1)\mathbf{v}_1+\cdots+(\lambda_k-\mu_k)\mathbf{v}_k=\mathbf{0}.$$

因为 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 线性无关, 所以 $\lambda_1=\mu_1,\ldots\lambda_k=\mu_k$.

逆命题由 (iii) 直接可得. □

注解 1.13 *上述命题 (iv) 的加强版如下:*

设 $\mathbf{v},\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k\in\mathbb{R}^n$. 则 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$ 线性无关且

$$\mathbf{v},\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_k$$

线性相关当且仅当存在唯一的 $\alpha_1,\ldots,\alpha_k\in\mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{v}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots+\alpha_k\mathbf{v}_k.$$

证明. 设存在唯一的 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k.$$

则由命题 *1.12 (iii)*, $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 线性相关. 设

$$\beta_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \beta_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0},$$

其中 $\beta_1, \ldots, \beta_k \in \mathbb{R}$. 则

$$\mathbf{v} = (\alpha_1 + \beta_1)\mathbf{v}_1 + \cdots + (\alpha_k + \beta_k)\mathbf{v}_k.$$

由 $\mathbf{v}$ 关于 $\mathbf{v}_1. \ldots, \mathbf{v}_k$ 的线性组合中系数唯一性的假设可知

$$\alpha_1 = \alpha_1 + \beta_1, \ldots, \alpha_k = \alpha_k + \beta_k.$$

于是,

$$\beta_1 = \cdots = \beta_k = 0.$$

故 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 线性无关.

以下引理是建立维数概念的关键.

引理 1.14 *(线性组合引理)* 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k; \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_\ell$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两组向量. 设对任意 $j \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$, $\mathbf{w}_j$ 是 $\mathbf{v}_1$, $\ldots$, $\mathbf{v}_k$ 的线性组合. 如果 $\ell > k$, 则 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_\ell$ 线性相关.

证明. 设 $\mathbf{w}_j=\sum_{i=1}^{k}\alpha_{i,j}\mathbf{v}_i$, 其中 $\alpha_{i,j}\in\mathbb{R}, j\in\{1,2,\ldots,\ell\}$. 再设 $\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell$ 是待定的实数. 则

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\ell}\lambda_j\mathbf{w}_j &= \sum_{j=1}^{\ell}\lambda_j\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_{i,j}\mathbf{v}_i\right) && (1)\\
&= \sum_{j=1}^{\ell}\sum_{i=1}^{k}(\lambda_j\alpha_{i,j})\mathbf{v}_i \quad \text{(分配律和结合律)} && (2)\\
&= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{\ell}(\lambda_j\alpha_{i,j})\mathbf{v}_i \quad \text{(和号互换)} && (3)\\
&= \sum_{i=1}^{k}\left(\sum_{j=1}^{\ell}\lambda_j\alpha_{i,j}\right)\mathbf{v}_i \quad \text{(分配律)} && (4)
\end{aligned}$$

考虑以 $\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell$ 为未知数的齐次线性方程组

$$\sum_{j=1}^{\ell}\lambda_j\alpha_{i,j}=0,\quad i=1,2,\ldots,k.$$

根据 $\ell>k$ 和第一章第一讲推论 2.8 (红色推论), 上述方程组有非零解 $\lambda_1,\ldots,\lambda_\ell\in\mathbb{R}$. 由 (4) 可知, $\sum_{j=1}^{\ell}\lambda_j\mathbf{w}_j=\mathbf{0}$. 故 $\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{w}_\ell$ 线性相关. □

1.3 坐标空间中的子空间

定义 1.15 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空子集. 如果对任意 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in U$ 和 $\alpha\in\mathbb{R}$,

(i) (加法封闭性) $\mathbf{x}+\mathbf{y}\in U$,

(ii) (数乘封闭性) $\alpha\mathbf{x} \in U$.

则称 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间 *(subspace)*.

例 1.16 坐标空间 $\mathbb{R}^n$ 有两个平凡的子空间 $\{\mathbf{0}\}$ 和 $\mathbb{R}^n$.

例 1.17 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 则 $\mathbf{0} \in U$.

证明. 设 $\mathbf{x} \in U$. 则 $\mathbf{0} = 0\mathbf{x} \in U$. □

1.3.1 基本性质

命题 1.18 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 中的非空子集. 则下列命题等价.

(i) U 是子空间;

(ii) U 中任意两个向量的线性组合仍在 U 中;

(iii) 对任意 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \in U$, $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k$ 的任意线性组合都在 U 中.

证明. "(i) $\Longrightarrow$ (ii)" 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ 是 U 中任意的两个向量, α, β 是任意两个实数. 如果 U 是子空间, 则 $\alpha\mathbf{x}, \beta\mathbf{y} \in U$ (数乘封闭性). 从而 $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in U$ (加法封闭性). 反之, 设 $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in U$. 取 $\alpha = \beta = 1$ 得到加法封闭性, 取 $\beta = 0$ 得到数乘封闭性. 故 U 是子空间.

"(ii) $\Longrightarrow$ (iii)" 当 $k = 1, 2$ 时, (ii) 蕴含 $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ 的所有线性组合都在 U 中. 设 $k > 2$ 时且 U 中任何 $k - 1$ 个

向量的线性组合都在 U 中. 对任意 $\alpha_1,\dots,\alpha_{k-1},\alpha_k\in\mathbb{R}$, $\mathbf{u}_1,\dots,\mathbf{u}_{k-1},\mathbf{u}_k\in U$, 我们有

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbf{u}_i=\left(\sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i\mathbf{u}_i\right)+\alpha_k\mathbf{u}_k\in U.$$

"(iii) $\Longrightarrow$ (i)" 由线性组合的定义直接得出. □

例 1.19 设 $\mathbf{v}\in\mathbb{R}^n$. 则 $\{\lambda\mathbf{v}\mid\lambda\in\mathbb{R}\}$ 是子空间.

设 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$. 则 $\{\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}\mid\alpha,\beta\in\mathbb{R}\}$ 是子空间.

例 1.20 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 其对应的 n 元齐次线性方程组记为 H. 验证 $\mathrm{sol}(H)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间.

证明. *(参照见第一次作业习题 4)* 设

$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix},\quad \mathbf{w}=\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}$$

是 H 的两个解. 则

$$\alpha_1\vec{A}^{(1)}+\cdots+\alpha_n\vec{A}^{(n)}=\mathbf{0}_m,\quad \beta_1\vec{A}^{(1)}+\cdots+\beta_n\vec{A}^{(n)}=\mathbf{0}_m.$$

令 λ,μ 是两个实数, $\mathbf{u}=\lambda\mathbf{v}+\mu\mathbf{w}$. 则

$$\mathbf{u}=\begin{pmatrix}\lambda\alpha_1+\mu\beta_1\\ \vdots\\ \lambda\alpha_1+\mu\beta_n\end{pmatrix}.$$

而

$$\sum_{j=1}^{n}(\lambda\alpha_j+\mu\beta_j)\vec{A}^{(j)} = \lambda\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\vec{A}^{(j)}\right)+\mu\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j\vec{A}^{(j)}\right) = \mathbf{0}_m.$$

故 $\mathbf{u} \in \mathrm{sol}(H)$. 根据命题 *1.18*, $\mathrm{sol}(H)$ 是子空间. □

例 1.21 设 $p, q \in \mathbb{Q}$ 不全为零,

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \mid p\alpha + q\beta = 0, \alpha, \beta \in \mathbb{Q} \right\}.$$

S 是否是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间?

答. 不是. 因为

$$\begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix} \in S \quad \text{但} \quad \sqrt{2}\begin{pmatrix} -q \\ p \end{pmatrix} \notin S. \quad \square$$

1.3.2 子空间的交与和

命题 1.22 设 Λ 是一个指标集, 对任意 $\lambda \in \Lambda$, U_λ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间. 则 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ 也是子空间.

证明. 设 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 因为 $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in U_\lambda$, 所以 $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \in U_\lambda$ (命题 1.18). 由此可知, $\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v} \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$. 故 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ 是子空间 (命题 1.18). □

例 1.23 考虑齐次线性方程组 H

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \cdots + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}$$

设 $V_i = \mathrm{sol}(a_{i,1}x_1 + \cdots + a_{i,n}x_n = 0)$, $i = 1, 2, \ldots, m$. 则 $\mathrm{sol}(H) = \cap_{i=1}^m V_i$. $\square$

设 $S_1, \ldots, S_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空子集. 我们定义 $S_1, \ldots, S_k$ 的和为

$$S_1 + \cdots + S_k := \{\mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_k | \mathbf{v}_1 \in S_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in S_k\}.$$

命题 1.24 设 $U_1, \ldots, U_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 则 $U_1 + \cdots + U_k$ 也是子空间.

证明. 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \sum_{i=1}^k U_i$. 则存在 $\mathbf{u}_i, \mathbf{v}_i \in U_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, 使得 $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i$ 和 $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^k \mathbf{v}_i$. 则对任意 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$,

$$\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} = \alpha\left(\sum_{i=1}^k \mathbf{u}_i\right) + \beta\left(\sum_{i=1}^k \mathbf{v}_i\right) = \sum_{i=1}^k (\alpha\mathbf{u}_i + \beta\mathbf{v}_i).$$

根据命题 1.18, $\alpha\mathbf{u}_i + \beta\mathbf{v}_i \in U_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$. 我们得到 $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in \sum_{i=1}^k U_i$. 故 $\sum_{i=1}^k U_i$ 是子空间. $\square$

例 1.25 设 $U_1, \ldots, U_k$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 证明

$$U_i \subset U_1 + \cdots + U_k, \quad i = 1, \ldots, n.$$

证明. 不妨证明 $U_1 \subset U_1 + \cdots + U_k$. 注意到

$$U_1 = \{\mathbf{u}_1 + \underbrace{\mathbf{0} + \cdots + \mathbf{0}}_{k-1} \mid \mathbf{u}_1 \in U_1\} \subset U_1 + \cdots + U_k. \quad \square$$

例 1.26 设 U, V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 如果 $U \subsetneq V$ 且 $V \subsetneq U$, 则 $U \cup V$ 不是子空间.

证明. 假设 $U \cup V$ 是子空间. 设 $\mathbf{x} \in U \setminus V$ 和 $\mathbf{y} \in V \setminus U$. 则 $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in U \cup V$. 不妨设 $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in U$. 则

$$\mathbf{y} = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) - \mathbf{x} \in U.$$

矛盾. $\square$

1.3.3 线性流形

定义 1.27 设 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ 和 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 则 $\{\mathbf{v}\} + U$ 简记为 $\mathbf{v} + U$. 称为一个线性流形.

例 1.28 设 $B \in \mathbb{R}^{m \times (n+1)}$, L 是 B 对应的 n 元线性方程组, H 是 B 的前 n 列组成矩阵对应的齐次线性方程组. 如果 L 相容, 则 $\mathrm{sol}(L) = \mathbf{v} + \mathrm{sol}(H)$, 其中 $\mathbf{v}$ 是 L 的一个解. 特别地, $\mathrm{sol}(L)$ 是线性流形.

证明. 设 $M = \mathbf{v} + \mathrm{sol}(H)$ 且 $\mathbf{w} \in M$. 则存在 $\mathbf{z} \in \mathrm{sol}(H)$ 使得 $\mathbf{w} = \mathbf{v} + \mathbf{z}$. 令

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}.$$

则

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} v_1 + z_1 \\ \vdots \\ v_n + z_n \end{pmatrix}.$$

我们计算

$$\sum_{i=1}^{n}(v_i + z_i)\vec{B}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} v_i\vec{B}^{(i)} + \sum_{i=1}^{n} z_i\vec{B}^{(i)} = \vec{B}^{(n+1)}.$$

于是, $\mathbf{w} \in \mathrm{sol}(L)$. 由此可知, $M \subset \mathrm{sol}(L)$. 再设:

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} \in \mathrm{sol}(L).$$

则 $\mathbf{w} = \mathbf{v} + (\mathbf{w} - \mathbf{v})$. 我们计算

$$\sum_{i=1}^{n}(w_i - v_i)\vec{B}^{(i)} = \sum_{i=1}^{n} w_i\vec{B}^{(i)} - \sum_{i=1}^{n} v_i\vec{B}^{(i)} = \vec{B}^{(n+1)} - \vec{B}^{(n+1)} = \mathbf{0}_m.$$

故 $\mathbf{w} - \mathbf{v} \in \mathrm{sol}(H)$. 我们有 $\mathrm{sol}(L) \subset M$. 故 $\mathrm{sol}(L) = M$. 再根据上一讲例 *1.18*, $\mathrm{sol}(L)$ 是线性流形. □

引理 1.29 设线性流形 $M = \mathbf{x}+U = \mathbf{y}+V$, 其中 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, U, V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 则 $U = V$ 且 $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in U$.

证明. 因为 $\mathbf{x} + \mathbf{0} \in M$, 所以存在 $\mathbf{v} \in V$ 使得 $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{v}$. 于是, $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in V$. 类似可知 $\mathbf{y} - \mathbf{x} \in U$. 我们得到

$$\pm(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \in U \cap V. \tag{5}$$

设 $\mathbf{u} \in U$. 则 $\mathbf{x}+\mathbf{u} \in M$. 于是, 存在 $\mathbf{v} \in V$ 使得

$$\mathbf{x}+\mathbf{u}=\mathbf{y}+\mathbf{v}.$$

由 (5) 可知, $\mathbf{u}=(\mathbf{y}-\mathbf{x})+\mathbf{v}$. 故 $\mathbf{u} \in V$. 我们得到 $U \subset V$. 同理 $V \subset U$. 故 $U=V$. 进而, $\mathbf{x}-\mathbf{y} \in U \cap V=U$. □

设线性流形 $M=\mathbf{x}+U$, 其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 和 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 我们称 U 是 M 的方向.

注解 1.30 一个线性流形是子空间当且仅当它含有零向量. 这是因为该流形可以写成零向量和它的方向之和.

1.3.4 子空间的生成

定义 1.31 设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空子集. 则由 S 中元素的所有线性组合构成的集合称为由 S 生成的子空间. 记为 $\langle S\rangle$. 集合 S 中的元素称为子空间 $\langle S\rangle$ 的一组生成元.

命题 1.32 设 S 是 $\mathbb{R}^n$ 的非空子集.

(i) $\langle S\rangle$ 是子空间;

(ii) 设 U 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间且 $S \subset U$. 则 $\langle S\rangle \subset U$.

证明. (i) 设 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \langle S\rangle$. 则存在 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_\ell \in S$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_\ell \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{x}=\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{u}_i \quad \text{和} \quad \mathbf{y}=\sum_{j=1}^{\ell} \beta_j \mathbf{v}_j.$$

则对任意 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 我们有

$$\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y} = \lambda\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbf{u}_i\right)+\mu\left(\sum_{j=1}^{\ell}\beta_j\mathbf{v}_j\right) = \sum_{i=1}^{k}(\lambda\alpha_i)\mathbf{u}_i+\sum_{j=1}^{\ell}(\mu\beta_j)\mathbf{v}_j.$$

故 $\lambda\mathbf{x}+\mu\mathbf{y} \in \langle S\rangle$. 根据命题 1.18, $\langle S\rangle$ 是子空间.

(ii) 因为 $S \subset U$, 所以 $\langle S\rangle \subset U$ (命题 1.18). □

当 S 是有限集 $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ 时, $\langle S\rangle$ 也记作 $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\rangle$.

例 1.33 设 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$. 则

$$\langle \mathbf{v}\rangle = \{\lambda\mathbf{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \quad 和 \quad \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \{\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}.$$

例 1.34 设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2 \in \mathbb{R}^2$,

$$V_1 = \langle \mathbf{e}_1\rangle,\ V_2 = \langle \mathbf{e}_2\rangle \text{ 和 } V_3 = \langle \mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2\rangle.$$

计算 $(V_1+V_2)\cap V_3$ 和 $V_1\cap V_3+V_2\cap V_3$.

解. 注意到 $V_1+V_2 = \langle \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\rangle = \mathbb{R}^2$. 故 $(V_1+V_2)\cap V_3 = V_3$. 而 $V_1\cap V_3 = V_2\cap V_3 = \{\mathbf{0}\}$. 我们有

$$V_1\cap V_3+V_2\cap V_3 = \{\mathbf{0}\}+\{\mathbf{0}\} = \{\mathbf{0}\}.$$

例 1.35 设 U, W 是 $\mathbb{R}^n$ 中的子空间. 则 $U+W = \langle U\cup W\rangle$.

证明. 显然 $U\cup W \subset U+W$. 根据命题 *1.32 (ii)*,

$$\langle U\cup W\rangle \subset U+W.$$

反之, 设 $\mathbf{x} \in U+W$. 则存在 $\mathbf{u} \in U$ 和 $\mathbf{w} \in W$ 使得 $\mathbf{x} = \mathbf{u}+\mathbf{w}$. 于是, $\mathbf{x} \in \langle U\cup W\rangle$, 即 $U+W\subset\langle U\cup W\rangle$. □

例 1.36 线性组合引理可重述为: 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k; \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_\ell$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的两组向量. 设对任意 $j \in \{1, 2, \ldots, \ell\}$,

$$\mathbf{w}_j \in \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle.$$

如果 $\ell > k$, 则 $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_\ell$ 线性相关.

1.3.5 子空间的直和

定义 1.37 设 U, V 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 如果 $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$, 则称 $U + V$ 是直和. 记为 $U \oplus V$.

命题 1.38 设 U, V 是 $\mathbb{R}^n$ 中子空间. 则 $U + V$ 是直和当且仅当对任意 $\mathbf{x} \in U + V$, 存在唯一的 $\mathbf{u} \in U$, $\mathbf{v} \in V$ 使得

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}.$$

证明. 设 $U + V$ 是直和且 $\mathbf{x} \in U + V$. 设

$$\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{u}' + \mathbf{v}',$$

其中 $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in U$, $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$. 则

$$\mathbf{u} - \mathbf{u}' = \mathbf{v}' - \mathbf{v} \implies \mathbf{u} - \mathbf{u}' \in U \cap V.$$

因为 $U \cap V = \{\mathbf{0}\}$, 所以 $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$. 进而 $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$.

反之, 假设 $U + V$ 不是直和. 则存在非零向量 $\mathbf{x} \in U \cap V$. 故 $\mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{x} + (-\mathbf{x})$. 与要求的唯一性矛盾. □