

## 第二章 矩阵

### 2 子空间的基底和维数

#### 2.1 极大线性无关组

**例 2.1** 设  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m \in \mathbb{R}^n$  且  $m > n$ . 则  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$  线性相关.

证明. 因为  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$  都是  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  的线性组合, 所以根据线性组合引理和  $m > n$  可知,  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_m$  线性相关.  $\square$

**定义 2.2** 设  $S \subset \mathbb{R}^n$ . 有限非空子集  $T \subset S$  称为  $S$  的一个极大线性无关组. 如果

(i)  $T$  中的向量线性无关;

(ii) 对任意  $\mathbf{v} \in S$ ,  $\mathbf{v} \in \langle T \rangle$ .

**注解 2.3** 如果  $S$  的一个极大线性无关组  $T = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d\}$ . 我们经常略去集合符号简称  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$  是  $S$  的一个极大线性无关组.

**命题 2.4** 设  $S \subset \mathbb{R}^n$ .

(i) (可扩充性) 设  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  是  $S$  中线性无关的向量. 则存在  $S$  中极大线性无关组且它包含  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ .

(ii) (等势性) 设  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\ell \in S$  线性无关,  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m$  是  $S$  的极大线性无关组. 则  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\ell$  是  $S$  的极大线性无关组当且仅当  $\ell = m$ .

证明. (i) 如果对任意  $\mathbf{u} \in S$ ,  $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  线性相关, 则  $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k \rangle$  (第五讲命题 1.11 (iv)). 于是,  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k\}$  是  $S$  中的一个极大线性无关组且它包含  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ . 否则, 存在  $\mathbf{u}_{k+1} \in S$  使得  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}$  线性无关. 对向量  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}$  重复上述推理过程, 我们要么得出

$$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}\}$$

是  $S$  的极大线性无关组, 要么证明存在向量  $\mathbf{u}_{k+2} \in S$  使得  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+2}$  线性无关. 由例 2.1 可知,  $S$  中不可能有  $n + 1$  个线性无关的向量. 故上述推理过程重复有限步后, 我们就会得到一个  $S$  中的极大线性无关组且它包含  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ .

(ii) 设  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\ell$  是  $S$  的极大线性无关组. 因为

$$\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m \in \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_\ell \rangle,$$

所以  $m \leq \ell$  (线性组合引理). 同理可知,  $\ell \leq m$ .

反之, 设  $\ell = m$ . 由 (i) 可知,  $S$  有一个极大线性无关组

$$\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m+1}, \dots, \mathbf{v}_{m+s}$$

由极大线性无关组的定义可知  $\mathbf{v}_i \in \langle \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m \rangle$ ,  $i = 1, 2, \dots, m + s$ . 假设  $s > 0$ . 根据线性组合引理,  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m, \mathbf{v}_{m+1}, \dots, \mathbf{v}_{m+s}$  线性相关, 矛盾. 故  $s = 0$ . 即  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$  是  $S$  的极大线性无关组.  $\square$

**注解 2.5** 由上述命题可知, 任何含有非零向量的集合必有极大线性无关组.

**例 2.6** 向量  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  是  $\mathbb{R}^n$  的一组极大线性无关组.

**例 2.7** 证明  $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_n$  是  $\mathbb{R}^n$  的一个极大线性无关组.

证明. 设  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  使得

$$\alpha_1(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) + \alpha_2(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) + \alpha_3\mathbf{e}_3 + \dots + \alpha_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

则

$$(\alpha_1 + \alpha_2)\mathbf{e}_1 + (\alpha_1 - \alpha_2)\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3 + \dots + \alpha_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}.$$

因为  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$  线性无关, 所以  $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ ,  $\alpha_3 = 0, \dots, \alpha_n = 0$ . 故  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ . 于是,

$$\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_n$$

线性无关. 由命题 2.4 (ii) 可知,  $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \dots, \mathbf{e}_n$  是  $\mathbb{R}^n$  的一个极大线性无关组.

## 2.2 子空间的基底

**定义 2.8** 设  $U \subset \mathbb{R}^n$  是子空间且  $U \neq \{\mathbf{0}\}$ . 向量集

$$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d\} \subset U$$

称为  $U$  的一组基, 如果对任意  $\mathbf{u} \in U$ , 存在唯一的

$$\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R},$$

使得  $\mathbf{u} = \alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_d \mathbf{u}_d$ .

如注解 2.3 所述, 当  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d\}$  是子空间  $U$  的一组基时, 我们也简称  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$  是  $U$  的一组基.

**命题 2.9** 设  $U \subset \mathbb{R}^n$  是子空间且  $U \neq \{\mathbf{0}\}$ . 向量集

$$\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d\}$$

是  $U$  的一组基当且仅当该向量集是  $U$  的极大线性无关组.

**证明.** 设  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d\}$  是  $U$  的基. 再设  $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R}$  使得

$$\alpha_1 \mathbf{u}_1 + \dots + \alpha_d \mathbf{u}_d = \mathbf{0}.$$

由基底定义可知,  $\alpha_1 = \dots = \alpha_d = \mathbf{0}$ . 故  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$  线性无关. 再由基底定义中条件 (ii) 可知,  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$  是  $U$  的极大线性无关组.

反之, 设  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$  是  $U$  的一个极大线性无关组. 根据第五讲命题 1.11 (iv),  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$  是  $U$  的一组基.  $\square$

由例 2.6 可知,  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  是  $\mathbb{R}^n$  中的一组基. 称之为  $\mathbb{R}^n$  的标准基.

**推论 2.10** 设  $S \subset \mathbb{R}^n$  包含非零向量. 则  $S$  中的极大线性无关组是  $\langle S \rangle$  的一组基.

证明. 设  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$  是  $S$  的一个极大线性无关组. 则

$$S \subset \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d \rangle.$$

由第五讲命题 1.25,  $\langle S \rangle \subset \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d \rangle$ . 而另一个方向的包含关系是显然的. 于是,  $\langle S \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d \rangle$ . 即  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$  是  $\langle S \rangle$  的极大线性无关组. 根据上述命题,  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$  是  $\langle S \rangle$  的一组基.  $\square$

**例 2.11** 设

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

求  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$  的一组基.

解. 根据上述推论, 我们只要求出  $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}\}$  中的一个极大

线性无关组即可.

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

于是, 以矩阵  $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$  为系数矩阵的齐次线性方程组只有平凡解. 故  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  线性无关. 由第二章第一讲例 1.9,  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$  线性相关. 故  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  是  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$  的一组基. 类似地可知,  $\mathbf{x}, \mathbf{z}$  和  $\mathbf{y}, \mathbf{z}$  都是  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle$  的基

**定理 2.12 (基扩充定理)** 设  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$  是子空间  $U$  中线性无关的向量. 则  $U$  有一组基包含  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ .

证明. 根据命题 2.4 (i),  $U$  中有极大线性无关组包含  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k$ . 再根据上述命题, 该极大线性无关组是  $U$  的一组基.  $\square$

## 2.3 维数

**定义 2.13** 设  $U$  是  $\mathbb{R}^n$  中的子空间. 如果  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$  是  $U$  的一组基, 则  $U$  的维数 (*dimension*) 定义为  $d$ . 当  $U = \{\mathbf{0}\}$  时, 其维数定义为 0. 该维数记为  $\dim(U)$ .

根据命题 2.4 (ii) 和命题 2.9, 子空间维数是良定义的. 因为坐标空间  $\mathbb{R}^n$  有标准基  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ , 所以  $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ .

**命题 2.14** 设  $U, W$  是  $\mathbb{R}^n$  的两个子空间且  $U \subset W$ . 则  $\dim(U) \leq \dim(W)$ . 进而,  $U=W$  当且仅当  $\dim(U) = \dim(W)$ .

证明. 设  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$  是  $U$  的一组基. 由假设  $U \subset W$  和基扩充定理 2.12,  $W$  有一组基包含  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$ . 故  $\dim(U) \leq \dim(W)$ .

再设  $d = \dim(W)$ . 则  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d$  也是  $W$  的基 (命题 2.4 (ii)). 故  $W \subset \langle \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_d \rangle = U$ .  $\square$

**命题 2.15** 设  $U, W$  是  $\mathbb{R}^n$  的两个子空间. 则

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W).$$

证明. 令  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  是  $U \cap W$  的一组基. 由基扩充定理,  $U$  有基底  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_{k+\ell}$ ;  $W$  有基底  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_{k+1}, \dots, \mathbf{w}_{k+m}$ .

断言.  $S = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_{k+\ell}, \mathbf{w}_{k+1}, \dots, \mathbf{w}_{k+m}\}$  是  $U + W$  的一组基.

断言的证明. 设  $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_\ell, \gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathbb{R}$  使得

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k + \beta_1 \mathbf{u}_{k+1} + \dots + \beta_\ell \mathbf{u}_{k+\ell} + \underbrace{\gamma_1 \mathbf{w}_{k+1} + \dots + \gamma_m \mathbf{w}_{k+m}}_{\mathbf{w}} = \mathbf{0}.$$

则  $\mathbf{w} \in U \cap W$ . 于是, 存在  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  使得

$$\mathbf{w} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k.$$

即

$$(-\gamma_1) \mathbf{w}_1 + \dots + (-\gamma_m) \mathbf{w}_m + \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

因为  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  线性无关, 所以

$$\gamma_1 = \dots = \gamma_m = 0.$$

故

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k + \beta_1 \mathbf{u}_{k+1} + \dots + \beta_\ell \mathbf{u}_{k+\ell} = \mathbf{0}.$$

因为  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_\ell, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$  线性无关, 所以  $\alpha_1 = \dots = \alpha_k = \beta_1 = \dots = \beta_\ell = 0$ . 于是,  $S$  中的向量线性无关.

再设  $\mathbf{x} \in U + W$ . 则存在  $\mathbf{y} \in U$  和  $\mathbf{z} \in W$  使得  $\mathbf{x} = \mathbf{y} + \mathbf{z}$ . 因为  $\mathbf{y}$  是  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{u}_{k+1}, \dots, \mathbf{u}_{k+\ell}$  的线性组合,  $\mathbf{z}$  是  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k, \mathbf{w}_{k+1}, \dots, \mathbf{w}_{k+m}$  的线性组合. 故  $\mathbf{x}$  是  $S$  中的向量的线性组合. 即  $S$  是  $U + W$  的一个极大线性无关组. 根据命题 2.9, 断言成立.

由断言可知  $\dim(U + W) = k + \ell + m$ . 因为

$$\dim(U \cap W) = k, \dim(U) = k + \ell, \dim(W) = k + m,$$

所以

$$\dim(U + W) + \dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W). \quad \square$$

**注解 2.16** 在上述命题证明中, 当  $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$ , 则集合  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k\}$  是空集, 即  $k = 0$ .

**例 2.17** 设  $U, W \subset \mathbb{R}^n$  是子空间,  $\dim(U) = d > 0$ ,  $\dim(W) = n - 1$ . 证明  $\dim(U \cap W) \geq d - 1$ .

证明. 由维数公式可知:

$$\begin{aligned}\dim(U \cap W) &= \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W) \\ &\geq d + n - 1 - n \quad (\because \dim(U + W) \leq n) \\ &= d - 1.\end{aligned}$$

**例 2.18** 设  $U, W \subset \mathbb{R}^n$  是子空间. 证明  $V + W$  是直和当且仅当  $\dim(V + W) = \dim(V) + \dim(W)$ .

证明. 由维数公式可知

$$\begin{aligned}\dim(V + W) &= \dim(V) + \dim(W) \\ &\iff \dim(U \cap W) = 0 \\ &\iff U \cap W = \{\mathbf{0}\}. \quad \square\end{aligned}$$

## 3 矩阵的秩

### 3.1 初等行变换下的不变量

计算过程(算法)中不变的量往往反映被计算对象的基本特征. 本小节研究关于矩阵初等行变换下的不变量.

**定义 3.1** 设  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . 由  $A$  的行向量  $\vec{A}_1, \dots, \vec{A}_m$  在行空间  $\mathbb{R}^{1 \times n}$  中生成的子空间称为  $A$  的行空间. 记为  $V_r(A)$ . 由  $A$  的列向量  $\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(n)}$  在列空间  $\mathbb{R}^m$  中生成的子空间称为  $A$  的列空间. 记为  $V_c(A)$ . 矩阵  $A$  的行秩是  $\dim(V_r(A))$ , 列秩是  $\dim(V_c(A))$ .

本节的主要结论是一个矩阵的行秩等于列秩.

**引理 3.2** 设  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  是通过一次初等行变换得到的. 则  $V_r(A) = V_r(B)$ . 特别地,  $A$  和  $B$  的行秩相同.

证明. 当  $B$  是由  $A$  通过一次第一类初等行变换得到的, 则  $A$  和  $B$  有共同的行向量. 故  $V_r(A) = V_r(B)$ .

当  $B$  是由  $A$  通过一次第二类初等行变换得到的, 设  $\vec{A}_k = \vec{B}_k$ ,  $k = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, m$ , 而  $\vec{B}_j = \vec{A}_j + \lambda \vec{A}_i$ , 其中  $i \neq j$  和  $\lambda \in \mathbb{R}$ . 则  $B$  的所有行向量在  $V_r(A)$  中. 故  $V_r(B) \subset V_r(A)$  (第二章第一讲命题 1.25 (ii)). 因为  $i \neq j$ , 所以  $\vec{A}_i = \vec{B}_i$ . 故  $\vec{A}_j = \vec{B}_j - \lambda \vec{B}_i$ . 由此可知,  $A$  的行向量都在  $V_r(B)$  中. 同样的命题蕴含  $V_r(A) \subset V_r(B)$ .

当  $B$  是由  $A$  通过一次第三类初等行变换得到的, 设  $\vec{A}_k = \vec{B}_k$ ,  $k = 1, \dots, j-1, j+1, \dots, m$ , 而  $\vec{B}_j = \lambda \vec{A}_j$ , 其中  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ . 则  $B$  的所有行向量在  $V_r(A)$  中. 故  $V_r(B) \subset V_r(A)$  (第二章第一讲命题 1.25 (ii)). 因为  $\lambda \neq 0$ , 所以  $\vec{A}_j = \lambda^{-1} \vec{B}_j$ . 故  $A$  的行向量都在  $V_r(B)$  中. 同样的命题蕴含  $V_r(A) \subset V_r(B)$ .  $\square$

**例 3.3** 第二类初等行变换得:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =: B.$$

注意到  $V_c(A) \neq V_c(B)$ .

一个令人意外得结论是:

**引理 3.4** 设  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . 设  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  是通过一次初等行变换得到的. 则  $A$  和  $B$  的**列秩**相同.

证明. 设以  $A$  和  $B$  为系数矩阵的齐次线性方程组分别是  $H_A$  和  $H_B$ . 则  $H_A$  和  $H_B$  等价 (第一章第一讲命题 2.2). 不妨设  $\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(r)}$  是  $A$  中列向量的极大线性无关组.

断言.  $\vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(r)}$  线性无关.

断言的证明. 设  $\alpha_1, \dots, \alpha_r \in \mathbb{R}$  使得

$$\alpha_1 \vec{B}^{(1)} + \dots + \alpha_r \vec{B}^{(r)} = \mathbf{0}_m.$$

则  $\alpha_1 \vec{B}^{(1)} + \dots + \alpha_r \vec{B}^{(r)} + 0\vec{B}^{(r+1)} + \dots + 0\vec{B}^{(n)} = \mathbf{0}_m$ . 换言之, 列向量

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

是方程组  $H_B$  的一个解. 故它也是  $H_A$  的一个解. 即

$$\alpha_1 \vec{A}^{(1)} + \dots + \alpha_r \vec{A}^{(r)} + 0\vec{A}^{(r+1)} + \dots + 0\vec{A}^{(n)} = \mathbf{0}_m.$$

我们得到  $\alpha_1 \vec{A}^{(1)} + \cdots + \alpha_r \vec{A}^{(r)} = \mathbf{0}_m$ . 因为  $\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(r)}$  线性无关, 所以  $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$ . 于是,  $\vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(r)}$  线性无关. 断言成立.

设  $j \in \{r+1, \dots, n\}$ . 则存在  $\beta_1, \dots, \beta_r \in \mathbb{R}$  使得  $\vec{A}^{(j)} = \beta_1 \vec{A}^{(1)} + \cdots + \beta_r \vec{A}^{(r)}$ . 这是因为  $\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(r)}$  是  $A$  中列向量的极大线性无关组. 我们得到

$$\begin{aligned} & \beta_1 \vec{A}^{(1)} + \cdots + \beta_r \vec{A}^{(r)} \\ & + 0 \vec{A}^{(r+1)} + \cdots + 0 \vec{A}^{(j-1)} + (-1) \vec{A}^{(j)} \\ & + 0 \vec{A}^{(j+1)} + \cdots + 0 \vec{A}^{(n)} = \mathbf{0}_m. \end{aligned}$$

换言之, 列向量

$$j \rightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

是  $H_A$  的解. 于是, 它也是  $H_B$  的解. 我们有

$$\vec{B}^{(j)} = \beta_1 \vec{B}^{(1)} + \cdots + \beta_r \vec{B}^{(r)}.$$

再根据断言可知  $\vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(r)}$  是  $B$  中列向量的极大线性无关组. 由推论 2.10 可知,

$$\dim(V_c(A)) = r = \dim(V_c(B)). \quad \square$$

在矩阵中互换两列的位置称为第一类初等列变换, 把一列通乘一个实数加到另一列上称为第二类初等列变换, 把一列通乘一个非零实数称为第三类初等列变换. 它们统称为初等列变换. 类似引理 3.2, 我们有

**引理 3.5** 设  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . 设  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  是通过一次初等列变换得到的. 则  $V_c(A) = V_c(B)$ . 特别地,  $A$  和  $B$  的列秩相同.

## 3.2 矩阵的秩

**定理 3.6** 设  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . 则  $A$  的行秩等于它的列秩.

证明. 由第一章第一讲命题 2.3 可知,  $A$  可以通过初等行变换化为阶梯型矩阵

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

其中  $\bullet$  代表非零实数,  $*$  代表实数.

设  $B$  中有  $k$  行是非零向量. 注意到这  $k$  行从左至右第一个非零坐标出现的位置两两不同. 故这  $k$  行线性无关. 由此得出, 这  $k$  行是行空间  $V_r(B)$  的一组基. 我们得到  $B$  的行秩等于  $k$ .

对  $B$  做第二类列变换得到

$$C = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \bullet & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \bullet & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

注意到  $C$  中只有  $k$  列非零, 且这  $k$  列从上到下第一个非零坐标出现的位置两两不同. 故这  $k$  列线性无关. 由此得出, 这  $k$  列是列空间  $V_c(C)$  的一组基. 我们有  $C$  的列秩等于  $k$ .

根据引理 3.5,  $B$  的列秩也等于  $k$ . 故  $B$  的行秩和列秩相等. 再根据引理 3.2 和 3.4,  $A$  的行秩和列秩相等.  $\square$

**定义 3.7** 矩阵  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  行秩称为它的秩. 记为  $\text{rank}(A)$ .

由上述定理可知, 矩阵的秩既是它的行秩也是它的列秩.