第二章　矩阵

5.2　与基底和维数有关的性质

定理 5.14 *(线性映射基本定理)* 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ 是 $\mathbb{R}^m$ 中的任意给定的向量. 则存在唯一的线性映射 ϕ 使得 $\phi(\mathbf{v}_j) = \mathbf{w}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

证明. 定义

$$\begin{array}{rccc} \phi: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j & \mapsto & \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{w}_j, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \end{array}.$$

因为 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是基底, 所以对任意 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 存在唯一的 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j$. 于是, ϕ 是良定义的. 显然 $\phi(\mathbf{v}_j) = \mathbf{w}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. 下面验证 ϕ 是线性的. 设

$$\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j,\ \mathbf{y} = \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{v}_j,\ \alpha_j, \beta_j \in \mathbb{R}.$$

则

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \phi\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{v}_j + \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{v}_j\right) &= \phi\left(\sum_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_j) \mathbf{v}_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^n (\alpha_j + \beta_j) \mathbf{w}_j \quad (\phi \text{ 的定义}) \\ &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbf{w}_j + \sum_{j=1}^n \beta_j \mathbf{w}_j = \phi(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{y}) \quad (\phi \text{ 的定义}). \end{aligned}$$

设 $\lambda \in \mathbb{R}$. 则

$$\phi(\lambda\mathbf{x}) = \phi\left(\sum_{j=1}^{n}(\lambda\alpha_j)\mathbf{v}_j\right) = \sum_{j=1}^{n}(\lambda\alpha_j)\mathbf{w}_j \quad (\phi \text{ 的定义})$$
$$= \lambda\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mathbf{w}_j = \lambda\phi(\mathbf{x}) \quad (\phi \text{ 的定义}).$$

最后, 我们来验证唯一性. 设 $\psi : \mathbb{R}^n :\longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射满足 $\psi(\mathbf{v}_j) = \mathbf{w}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. 则

$$\psi(\mathbf{x}) = \psi\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mathbf{v}_j\right) = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\psi(\mathbf{v}_j) = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\mathbf{w}_j = \phi(\mathbf{x}).$$

故 $\psi = \phi$. □

例 5.15 设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的标准基, 且 $\theta \in [0, 2\pi)$. 设 $R_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 的线性映射满足

$$R_\theta(\mathbf{e}_1) = \cos(\theta)\mathbf{e}_1 + \sin(\theta)\mathbf{e}_2,\ R_\theta(\mathbf{e}_2) = -\sin(\theta)\mathbf{e}_1 + \cos(\theta)\mathbf{e}_2.$$

设 $\mathbf{x} = (\rho\cos(\alpha), \rho\sin(\alpha))^t$. 可直接计算可得

$$R_\theta(\mathbf{x}) = (\rho\cos(\alpha+\theta), \rho(\sin(\alpha+\theta)).$$

我们称 R_θ 是 $\mathbb{R}^2$ 上的旋转 *(rotation)*.

例 5.16 设 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的标准基. 设 $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 是满足 $f(\mathbf{e}_j) = \lambda_j, j = 1, 2, \ldots, n$ 的线性映

射. 则对任意 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$,

$$f(\mathbf{x}) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

称 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上的线性函数.

例 5.17 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\phi_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是满足 $\phi_A(\mathbf{e}_j)=\vec{A}^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. 则对任意 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n \in \mathbb{R}^n$,

$$\phi_A(\mathbf{x}) = x_1\vec{A}^{(1)} + \cdots + x_n\vec{A}^{(n)}.$$

称 ϕ_A 是由 A 诱导的线性映射.

设 H 是以 A 为系数矩阵的齐次线性方程程组, $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m$ 且 L 是以 $B = (A|\mathbf{b})$ 为增广矩阵的线性方程组. 则

$$\ker(\phi_A) = \mathrm{sol}(H),\ \mathrm{im}(\phi_A) = V_c(A) \text{ 且 } L \text{ 相容 } \iff \mathbf{b} \in \mathrm{im}(\phi).$$

命题 5.18 设 $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射, U 是 $\mathbb{R}^n$ 的子空间. 则 $\dim(U) \geq \dim(\phi(U))$;

证明. 设 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_d$ 是 U 的一组基. 则

$$\phi(U) = \langle \phi(\mathbf{u}_1), \ldots, \phi(\mathbf{u}_d)\rangle.$$

根据第二章第二讲推论 2.9, $\dim(\phi(U)) \leq d$. □

定理 5.19 *(对偶定理, 线性映射版)* 设 $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射. 则

$$\dim(\ker(\phi)) + \dim(\mathrm{im}(\phi)) = n.$$

证明. 设 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_d$ 是 $\ker(\phi)$ 的一组基. 由基扩充定理, $\mathbb{R}^n$ 有一组基 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_d$, $\mathbf{v}_{d+1},\ldots,\mathbf{v}_n$.

断言. $\phi(\mathbf{v}_{d+1}),\ldots,\phi(\mathbf{v}_n)$ 是 $\mathrm{im}(\phi)$ 的一组基.

断言的证明. 先验证 $\phi(\mathbf{v}_{d+1}),\ldots,\phi(\mathbf{v}_n)$ 线性无关. 根据上一讲引理 5.13, 只需验证

$$\ker(\phi)\cap\langle\mathbf{v}_{d+1},\ldots,\mathbf{v}_n\rangle=\{\mathbf{0}_n\}. \tag{1}$$

设 $\mathbf{x}\in\ker(\phi)\cap\langle\mathbf{v}_{d+1},\ldots,\mathbf{v}_n\rangle$. 则 $\exists\,\alpha_1,\ldots,\alpha_d,\beta_{d+1},\ldots,\beta_n\in\mathbb{R}$ 使得 $\mathbf{x}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\cdots\alpha_d=\beta_{d+1}\mathbf{v}_{d+}+\cdots+\beta_n\mathbf{v}_n$. 因为 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_d,\mathbf{v}_{d+1},\ldots,\mathbf{v}_n$ 线性无关, 所以 $\alpha_1=\cdots=\alpha_d=0$. 故 $\mathbf{x}=\mathbf{0}$. 于是, (1) 成立.

再验证 $\mathrm{im}(\phi)=\langle\phi(\mathbf{v}_1),\ldots,\phi(\mathbf{v}_n)\rangle$. 因为 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 所以 $\mathrm{im}(\phi)=\langle\phi(\mathbf{v}_1),\ldots,\phi(\mathbf{v}_n)\rangle$ (上一讲命题 5.3 (iii)). 因为 $\phi(\mathbf{v}_1)=\cdots=\phi(\mathbf{v}_d)=\mathbf{0}_m$, 所以 $\mathrm{im}(\phi)=\langle\phi(\mathbf{v}_{d+1}),\ldots,\phi(\mathbf{v}_n)\rangle$. 断言成立.

由断言可知 $\dim(\mathrm{im}(\phi))=n-d$. □

推论 5.20 设 $\phi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 是线性映射. 则 ϕ 是单射当且仅当它是满射.

证明. 如果 ϕ 是单射, 则 $\dim(\ker(\phi))=0$. 由上述定理可知 $\dim(\mathrm{im}(\phi))=n$. 又因为 $\mathrm{im}(\phi)\subset\mathbb{R}^n$, 所以 $\mathrm{im}(\phi)=\mathbb{R}^n$ (第二章第二讲命题 2.13). 即 ϕ 是满射. 反之, 如果 ϕ 是满射,

则 $\dim(\mathrm{im}(\phi)) = n$. 由上述定理可知, $\dim(\ker(\phi)) = 0$. 在上一讲命题 5.11, ϕ 是单射. □

例 5.21 *利用定理 5.19 证明对偶定定理的方程版.*

证明. 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, H 是以 A 为系数矩阵的 n 元齐次线性方程组, ϕ_A 是由 A 诱导的从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的线性映射. 由例 5.17 可知, $\mathrm{im}(\phi_A) = V_c(A)$ 和 $\ker(\phi_A) = \mathrm{sol}(H)$. 故定理 5.19 蕴含对偶定理的方程版.

6 矩阵的运算

设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$; $\boldsymbol{\epsilon}_1, \ldots, \boldsymbol{\epsilon}_m$ 分别是 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{R}^m$ 的标准基.

6.1 线性映射在标准基下的矩阵表示

考虑线性映射 $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$. 对 $j = 1, 2, \ldots, n$, 设

$$\phi(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{i,j}\boldsymbol{\epsilon}_i.$$

根据第二章第三讲定理 5.9, ϕ 由矩阵

$$A = (\phi(\mathbf{e}_1), \ldots, \phi(\mathbf{e}_n)) = (a_{i,j})_{m\times n}$$

唯一确定. 我们称 A 是线性映射 ϕ 在标准基下的矩阵的表示, 简称 ϕ 的矩阵. 记为 A_ϕ.

设 $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)^t$. 则

$$\begin{aligned}\phi(\mathbf{x}) &= \phi\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{e}_j\right)=\sum_{j=1}^{n} x_j\phi(\mathbf{e}_j)\\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j\vec{A}^{(j)} \quad (\text{向量版的公式})\\ &= \begin{pmatrix}\sum_{j=1}^{n} a_{1,j}x_j\\ \vdots\\ \sum_{j=1}^{n} a_{m,j}x_j\end{pmatrix} \quad (\text{坐标版的公式})\end{aligned}$$

例 6.1 设 $\phi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 是零映射, 即 $\phi(\mathbf{e}_j)=\mathbf{0}_m$, $j=1,2,\ldots,n$. 则 $A_\phi=O_{m\times n}$.

例 6.2 设 $\phi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ 是数乘映射, 即 $\phi(\mathbf{e}_j)=\lambda\mathbf{e}_j$, $j=1,2,\ldots,n$, 其中 $\lambda\in\mathbb{R}$. 则

$$A_\phi=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \lambda & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \lambda\end{pmatrix}=\lambda E_n.$$

例 6.3 设 $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ 是线性函数, $f(\mathbf{e}_1)=\alpha_1,\ldots,f(\mathbf{e}_n)=\alpha_n$. 则 $A_f=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$. 设 $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)^t$. 则

$$f(\mathbf{x})=\alpha_1x_1+\cdots+\alpha_nx_n.$$

例 6.4 设 $T_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 是旋转, 即

$T_\theta(\mathbf{e}_1) = \cos(\theta)\mathbf{e}_1 + \sin(\theta)\mathbf{e}_2$ 和 $T_\theta(\mathbf{e}_2) = -\sin(\theta)\mathbf{e}_1 + \cos(\theta)\mathbf{e}_2$.

则 T_θ 的矩阵是

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

于是

$$T_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta)x - \sin(\theta)y \\ \sin(\theta)x + \cos(\theta)y \end{pmatrix}.$$

定理 6.5 设 $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的线性映射的集合. 定义

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) & \longrightarrow & \mathbb{R}^{m\times n} \\ & \phi & \mapsto & A_\phi \end{array}.$$

则 Φ 是双射且其逆是

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & \mathbb{R}^{m\times n} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\ & A & \mapsto & \phi_A \end{array}.$$

证明. 设 $\phi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. $\Psi \circ \Phi(\phi) = \Psi(A_\phi)$. 注意到

$$\Psi(A_\phi)(\mathbf{e}_j) = \vec{A}_\phi^{(j)} = \phi(\mathbf{e}_j), \quad j = 1, 2, \ldots, n.$$

根据第二章第三讲定理 5.9， $\Psi(A_\phi) = \phi$. 于是,

$$\Psi \circ \Phi = \mathrm{id}_{\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)}.$$

设 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 则 $\Phi \circ \Psi(A) = \Phi(\phi_A)$. 注意到矩阵 $\Phi(\phi_A)$ 的第 j 列是 $\phi_A(\mathbf{e}_j) = \vec{A}^{(j)}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. 于是, $\Phi(\phi_A) = A$. 由此可知 $\Phi \circ \Psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^{m\times n}}$. □

下面的命题是用矩阵来描述线性映射.

命题 6.6 设 $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射, 它在标准基下的矩阵是 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

(i) $\mathrm{im}(\phi) = V_c(A)$, 从而 $\dim(\mathrm{im}(\phi)) = \mathrm{rank}(A)$. 特别地, ϕ 是满射当且仅当 A 行满秩.

(ii) $\ker(\phi)$ 是 A 对应的齐次线性方程组的解空间, 从而 $\dim(\ker(\phi)) = n - \mathrm{rank}(A)$. 特别地, ϕ 是单射当且仅当 A 列满秩.

(iii) ϕ 是双射当且仅当 $m = n$ 且 A 满秩.

证明. 根据定理 6.5, $\phi = \phi_A$.

(i) 由第二章第三讲例 5.12 可知, $\mathrm{im}(\phi) = V_c(A)$. 故

$$\dim(V_c(A)) = \mathrm{rank}(A).$$

注意到 ϕ 满当且仅当 $V_c(A) = \mathbb{R}^m$, 即 $V_c(A) = \mathbb{R}^m$ 当且仅当 $\dim V_c(A) = m$.

(ii) 由第二章第三讲例 5.12 可知, $\ker(\phi)$ 是 A 对应的齐次线性方程组的解空间. 根据对偶定理和 (i), 我们有

$$\dim(\ker(\phi)) = n - \mathrm{rank}(A).$$

根据第二章第三讲命题 5.8, ϕ 单当且仅当 $\ker(\phi)=\{\mathbf{0}_n\}$, 即上述解空间是 $\mathbf{0}_n$. 根据第二章第三讲引理 4.2, $\mathrm{rank}(A)=n$.

(iii) 是 (i) 和 (ii) 的直接推论. □

例 6.7 设 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_4$ 是 $\mathbb{R}^4$ 的标准基, $\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2,\boldsymbol{\epsilon}_3$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一组基. 线性映射 $\phi:\mathbb{R}^4 :\longrightarrow \mathbb{R}^3$ 由

$$\begin{cases} \phi(\mathbf{e}_1) &= 2\boldsymbol{\epsilon}_1-\boldsymbol{\epsilon}_3 \\ \phi(\mathbf{e}_2) &= \boldsymbol{\epsilon}_2-\boldsymbol{\epsilon}_3 \\ \phi(\mathbf{e}_3) &= 4\boldsymbol{\epsilon}_1+\boldsymbol{\epsilon}_2-3\boldsymbol{\epsilon}_3 \\ \phi(\mathbf{e}_4) &= 2\boldsymbol{\epsilon}_1+\boldsymbol{\epsilon}_2-2\boldsymbol{\epsilon}_3 \end{cases}$$

计算

(i) 计算 ϕ 在 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3,\mathbf{e}_4;\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2,\boldsymbol{\epsilon}_3$ 下的矩阵;

(ii) 计算 $\ker(\phi)$ 和 $\mathrm{im}(\phi)$ 的维数;

(iii) 分别计算 $\ker(\phi)$ 和 $\mathrm{im}(\phi)$ 的一组基底.

解. *(i)* 由定义可知:

$$A_\phi=(\phi(\mathbf{e}_1),\phi(\mathbf{e}_2),\phi(\mathbf{e}_3),\phi(\mathbf{e}_4))=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

(ii) 利用初等行变换得

$$A_\phi \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $\mathrm{rank}(A_\phi) = 2$, 所以 $\dim(\mathrm{im}(\phi)) = 2$. 由对偶定理可知, $\dim(\ker(\phi)) = 4 - 2 = 2$.

(iii) $\ker(\phi)$ 对应的齐次线性方程组是

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 0. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -3x_3 - 2x_4 \\ x_2 = -x_3 - x_4. \end{cases}$$

于是, $\ker(\phi)$ 的一组基是

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad 和 \quad \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

像空间 $\mathrm{im}(\phi)$ 的基是 A_ϕ 中的极大线性无关组. 因为

$$\dim(\mathrm{im}(\phi)) = 2,$$

所以取 A_ϕ 中任意两个线性无关的列向量即可. 例如 $\mathrm{im}(\phi)$ 的一组基是 $\vec{A}_\phi^{(1)}, \vec{A}_\phi^{(2)}$.

例 6.8 利用方程版的对偶定理证明映射版的对偶定理.

证明. 设 $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 是线性映射, 它在标准基下的矩阵是 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. 再设 H_A 是以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组. 根据方程版对偶定理(第二章第三讲定理 4.6)

$$\dim(\mathrm{sol}(H_A)) + \mathrm{rank}(A) = n.$$

根据命题 6.6 (i) 和 (ii),

$$\dim(\ker(\phi)) + \dim(\mathrm{im}(\phi)) = n.$$

即映射版对偶定理(第二章第三讲定理 5.13)成立.

6.2 通过线性映射的运算定义矩阵的运算

定义 6.9 设 ϕ 和 ψ 是从集合 S 到 $\mathbb{R}^m$ 的映射, $\lambda \in \mathbb{R}$. 令:

$$\begin{array}{rccc} \phi+\psi: & S & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & s & \mapsto & \phi(s)+\psi(s) \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{rccc} \lambda\phi: & S & \longrightarrow & \mathbb{R}^m \\ & s & \mapsto & \lambda\phi(s). \end{array}$$

分别称为映射的加法与映射的数乘.

根据 $\mathbb{R}^m$ 中线性运算的性质, 我们可直接验证映射的加法和数乘满足交换律和结合律且这两个运算满足分配律.

命题 6.10 设 ϕ 和 ψ 是从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的线性映射, $\lambda \in \mathbb{R}$. 则 $\phi+\psi$ 和 $\lambda\phi$ 也是线性映射.

证明. 设 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$. 我们计算

$$\begin{aligned}(\phi+\psi)(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \phi(\mathbf{x}+\mathbf{y})+\psi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \quad (\text{映射加法的定义})\\ &= \phi(\mathbf{x})+\phi(\mathbf{y})+\psi(\mathbf{x})+\psi(\mathbf{y}) \quad (\text{线性映射的定义})\\ &= (\phi+\psi)(\mathbf{x})+(\phi+\psi)(\mathbf{y}) \quad (\text{映射加法的定义}).\end{aligned}$$

设 $\alpha\in\mathbb{R}$. 则

$$\begin{aligned}(\phi+\psi)(\alpha\mathbf{x}) &= \phi(\alpha\mathbf{x})+\psi(\alpha\mathbf{x}) \quad (\text{映射加法的定义})\\ &= \alpha\phi(\mathbf{x})+\alpha\psi(\mathbf{x}) \quad (\text{线性映射的定义})\\ &= \alpha(\phi+\psi)(\mathbf{x}) \quad (\text{映射加法的定义}).\end{aligned}$$

于是, $\phi+\psi$ 是线性映射. 类似地,

$$\begin{aligned}(\lambda\phi)(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \lambda\phi(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \quad (\text{映射数乘的定义})\\ &= \lambda(\phi(\mathbf{x})+\phi(\mathbf{y})) \quad (\text{线性映射的定义})\\ &= (\lambda\phi)(\mathbf{x})+(\lambda\phi)(\mathbf{y}) \quad (\text{映射数乘的定义}).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\lambda\phi)(\alpha\mathbf{x}) &= \lambda\phi(\alpha\mathbf{x}) \quad (\text{映射数乘的定义})\\ &= \lambda\alpha\phi(\mathbf{x}) \quad (\text{线性映射的定义})\\ &= \alpha(\lambda\phi)(\mathbf{x}) \quad (\text{映射数乘的定义}). \quad \square\end{aligned}$$

设 $\phi,\psi\in\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, 它们在标准基下的表示分别是 $A=(a_{i,j})_{m\times n}$ 和 $B=(b_{i,j})_{m\times n}$. 则

$$(\phi+\psi)(\mathbf{e}_j)=\phi(\mathbf{e}_j)+\psi(\mathbf{e}_j)=\vec{A}^{(j)}+\vec{B}^{(j)}, \quad j=1,2,\ldots,n.$$

由此我们定义两个矩阵 A 和 B 的和

$$A+B=(\vec{A}^{(1)}+\vec{B}^{(1)},\ldots,\vec{A}^{(n)}+\vec{B}^{(n)}).$$

等价地, $A+B=(a_{i,j}+b_{i,j})_{m\times n}$.

设 $\lambda\in\mathbb{R}$. 则

$$(\lambda\phi)(\mathbf{e}_j)=\lambda\phi(\mathbf{e}_j)=\lambda\vec{A}^{(j)},\quad j=1,2,\ldots,n.$$

由此我们定义矩阵的数乘

$$\lambda A=(\lambda\vec{A}^{(1)},\ldots,\lambda\vec{A}^{(n)}).$$

等价地, $\lambda A=(\lambda a_{i,j})_{m\times n}$.

由矩阵加法和数乘的定义与定理 6.5 可知：对任意 $\lambda\in\mathbb{R}, A, B\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 我们有

$$\phi_A+\phi_B=\phi_{A+B}\quad \text{和}\quad \lambda\phi_A=\phi_{\lambda A}.$$

可直接验证矩阵的加法满足交换律和结合律, 且对于任意 $A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $A+O_{m\times n}=A$ 和 $A+(-A)=O_{m\times n}$. 进而, 对于任意 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$. 分配律:

$$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B\quad \text{和}\quad (\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A.$$

例 6.11 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&2&0\end{pmatrix}\quad \text{和}\quad B=\begin{pmatrix}2&1&-3\\2&2&1\end{pmatrix}.$$

计算 $3A-2B$.

解.

$$3A-2B=\begin{pmatrix}3&0&-3\\0&6&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&2&-6\\4&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-2&3\\-4&2&-2\end{pmatrix}$$

例 6.12 设 $A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 证明:

$$\operatorname{rank}(A+B)\le\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B).$$

证明. 因为 $A+B=(\vec{A}^{(1)}+\vec{B}^{(1)},\dots,\vec{A}^{(n)}+\vec{B}^{(n)})$ 且

$$\vec{A}^{(1)}+\vec{B}^{(1)},\dots,\vec{A}^{(n)}+\vec{B}^{(n)}\in V_c(A)+V_c(B),$$

所以 $V_c(A+B)\subset V_c(A)+V_c(B)$. 故

$$\dim V_c(A+B)\le\dim(V_c(A)+V_c(B))\le\dim V_c(A)+\dim V_c(B),$$

即 $\operatorname{rank}(A+B)\le\operatorname{rank}(A)+\operatorname{rank}(B)$.

推论 6.13 设 $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$ 从 $\mathbb{R}^n$ 到 $\mathbb{R}^m$ 的线性映射的集合. 映射 Φ 和 Ψ 由定理 *6.5* 给出. 则对任意 $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $\phi,\psi\in\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m)$, $A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$, 我们有:

$$\Phi(\lambda\phi+\mu\psi)=\lambda\Phi(\phi)+\mu\Phi(\psi)$$

和

$$\Psi(\lambda A+\mu B)=\lambda\Psi(A)+\mu\Psi(B).$$

证明. 我们计算

$$
\begin{aligned}
\Phi(\lambda\phi+\mu\psi) &= A_{\lambda\phi+\mu\psi} \quad (\Phi \text{ 的定义}) \\
&= A_{\lambda\phi}+A_{\mu\psi} \quad (\text{矩阵加法的定义}) \\
&= \lambda A_{\phi}+\mu A_{\psi} \quad (\text{矩阵数乘的定义}) \\
&= \lambda\Phi(\phi)+\mu\Phi(\psi) \quad (\Phi \text{ 的定义}).
\end{aligned}
$$

类似地,

$$
\begin{aligned}
\Psi(\lambda A+\mu B) &= \phi_{\lambda A+\mu B} \quad (\Psi \text{ 的定义}) \\
&= \phi_{\lambda A}+\phi_{\mu B} \quad (\text{矩阵加法的定义}) \\
&= \lambda\phi_{A}+\mu\phi_{B} \quad (\text{矩阵数乘的定义}) \\
&= \lambda\Psi(A)+\mu\Phi(B) \quad (\Psi \text{ 的定义}).
\end{aligned}
$$

6.3 乘法

命题 6.14 设 $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^s), \phi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^s,\mathbb{R}^m)$. 即

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\psi"] \arrow[dr, "\phi\circ\psi"] & \mathbb{R}^s \arrow[d, "\phi"] \\
& \mathbb{R}^m.
\end{tikzcd}
$$

则

$$\phi\circ\psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^m).$$

证明. 设 $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. 我们计算

$$\phi\circ\psi(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{y}) = \phi(\alpha\psi(\mathbf{x})+\beta\psi(\mathbf{y})) = \alpha\phi\circ\psi(\mathbf{x})+\beta\phi\circ\psi(\mathbf{y}). \quad \square$$

我们来推导上述 $\psi\circ\phi$ 的矩阵. 为此, 再设 $\boldsymbol{\delta}_1,\dots,\boldsymbol{\delta}_s$ 是 $\mathbb{R}^s$ 的标准基. 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times s}$ 是 ϕ 在 $\boldsymbol{\delta}_1,\dots,\boldsymbol{\delta}_s$; $\boldsymbol{\epsilon}_1,\dots,\boldsymbol{\epsilon}_m$ 下的矩阵; $B\in\mathbb{R}^{s\times n}$ 是 ψ 在 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$; $\boldsymbol{\delta}_1,\dots,\boldsymbol{\delta}_s$ 下的矩阵. 令 $A=(a_{i,k})_{m\times s}$ 和 $B=(b_{k,j})_{s\times n}$.

设 $C=(c_{i,j})_{m\times n}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 是 $\phi\circ\psi$ 在 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$; $\boldsymbol{\epsilon}_1,\dots,\boldsymbol{\epsilon}_m$ 下的矩阵. 我们计算

$$
\begin{aligned}
C &= (\phi\circ\psi(\mathbf{e}_1),\dots,\phi\circ\psi(\mathbf{e}_n)) \quad (\text{矩阵表示的定义})\\
&= \left(\phi(\vec{B}^{(1)}),\dots,\phi(\vec{B}^{(n)})\right) \quad (\text{矩阵表示的定义})\\
&= \left(\sum_{k=1}^{s} b_{k,1}\vec{A}^{(k)},\dots,\sum_{k=1}^{s} b_{k,n}\vec{A}^{(k)}\right) \quad (\text{向量形式})\\
&= \left(\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{s} b_{k,1}a_{1,k}\\ \vdots\\ \sum_{k=1}^{s} b_{k,1}a_{m,k}\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{s} b_{k,n}a_{1,k}\\ \vdots\\ \sum_{k=1}^{s} b_{k,n}a_{m,k}\end{pmatrix}\right) \quad (\text{坐标形式})\\
&= \begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{s} b_{k,1}a_{1,k} & \cdots & \sum_{k=1}^{s} b_{k,n}a_{1,k}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \sum_{k=1}^{s} b_{k,1}a_{m,k} & \cdots & \sum_{k=1}^{s} b_{k,n}a_{m,k}\end{pmatrix}\\
&= \left(\sum_{k=1}^{s} a_{i,k}b_{k,j}\right)_{m\times n}.
\end{aligned}
$$

故

$$
c_{i,j}=\sum_{k=1}^{s} a_{i,k}b_{k,j},\quad i=1,2,\dots,m, j=1,2,\dots,n. \qquad (2)
$$

定义 6.15 设 $A=(a_{i,k})_{m\times s}\in\mathbb{R}^{m\times s}$, $B=(b_{k,j})_{s\times n}\in\mathbb{R}^{s\times n}$. 则 A 和 B 的乘积 $C=(c_{i,j})\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 由 (2) 给出, 其中 $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$. 我们把 C 记为 AB.

注解 6.16 设 $A=(a_{i,k})_{m\times s}\in\mathbb{R}^{m\times s}$, $B=(b_{k,j})_{s\times n}\in\mathbb{R}^{s\times n}$. 乘积 AB 有不同的等价表述方式如下:

(i) *(映射版)* 设 $\phi_B:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^s$ 和 $\phi_A:\mathbb{R}^s\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 分别是 A 和 B 对应的线性映射. 由上述计算可知 AB 是线性映射 $\phi_A\circ\phi_B$ 对应的矩阵. 即

$$\phi_A\circ\phi_B=\phi_{AB}.$$

(ii) *(列向量版)* 设

$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_s\end{pmatrix}\Longrightarrow A\mathbf{v}=\sum_{k=1}^{s}v_k\vec{A}^{(k)}=\begin{pmatrix}\sum_{k=1}^s a_{1,k}v_k\\ \vdots\\ \sum_{k=1}^s a_{m,k}v_k\end{pmatrix}.$$

故

$$AB=\left(A\vec{B}^{(1)},\dots,A\vec{B}^{(n)}\right).$$

验证如下: 等式右侧第 i 行第 j 列处的元素是 $A\vec{B}^{(j)}$ 中的第 i 个元素. 即 $\sum_{k=1}^s a_{i,k}b_{k,j}$.

(iii) *(行向量版)* 设

$$\begin{aligned}\mathbf{w}&=(w_1,\dots,w_s)\Longrightarrow \mathbf{w}B&&=\textstyle\sum_{k=1}^s w_k\vec{B}_k\\ &&&=\left(\textstyle\sum_{k=1}^s w_kb_{k,1},\dots,\sum_{k=1}^s w_kb_{k,n}\right).\end{aligned}$$

故

$$AB = \begin{pmatrix} \vec{A}_1 B \\ \vdots \\ \vec{A}_m B \end{pmatrix}.$$

验证如下: 等式右侧第 i 行第 j 列处的元素是 $\vec{A}_i\vec{B}$ 中的第 j 个元素. 即 $\sum_{k=1}^{s} a_{i,k}b_{k,j}$.

(iv) *(行-列向量版)* 设:

$$\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_k), \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_s \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathbf{uv} = u_1v_1 + \cdots + u_sv_s.$$

故

$$AB = \begin{pmatrix} \vec{A}_1\vec{B}^{(1)} & \cdots & \vec{A}_1\vec{B}^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_m\vec{B}^{(1)} & \cdots & \vec{A}_m\vec{B}^{(n)} \end{pmatrix} = \left(\vec{A}_i\vec{B}^{(j)}\right)_{m\times n}.$$

验证如下: 等式右侧第 i 行第 j 列处的元素是

$$\vec{A}_i\vec{B}^{(j)} = (a_{i,1}, \ldots, a_{i,s}) \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ \vdots \\ b_{s,j} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{s} a_{i,k}b_{k,j}.$$

例 6.17 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

计算 AB.

解.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -1 \\ 4 & 15 & -1 \end{pmatrix}.$$

注意到 BA 没有定义.

例 6.18 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

计算 AB 和 BA.

解.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

而

$$BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

注意到 $AB \neq BA$.