第二章　矩阵

例 6.19 设 $A=(a_{i,j})\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 证明:

$$\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)A=\begin{pmatrix}\lambda_1\vec{A}_1\\ \vdots\\ \lambda_m\vec{A}_m\end{pmatrix}$$

和

$$A\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)=(\lambda_1\vec{A}^{(1)},\ldots,\lambda_n\vec{A}^{(n)}).$$

证明. 矩阵 $B=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)A$ 中第 i 行第 j 列处的元素等于

$$(0,\ldots,0,\lambda_i,0,\ldots 0)\vec{A}^{(j)}=\lambda_i a_{i,j}\xRightarrow{j=1,2,\ldots,n}\vec{B}_i=\lambda_i\vec{A}_i.$$

矩阵 $C=A\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$ 中第 i 行第 j 列处的元素等于

$$\vec{A}_i\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \lambda_j\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\lambda_j a_{i,j}\xRightarrow{i=1,2,\ldots,m}\vec{C}^{(j)}=\lambda_j\vec{A}^{(j)}.$$

上例说明 $\mathrm{diag}_m(\lambda)A=A\mathrm{diag}_n(\lambda)=\lambda A$. 特别地,

$$O_mA=AO_n=O_{m\times n}\quad 和\quad E_mA=AE_n=A.$$

矩阵的乘法大大化简了我们对线性方程组和线性映射的表示. 设 $A=(a_{i,j})\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 则齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1+\cdots+a_{1,n}x_n=0 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1+\cdots+a_{m,n}x_n=0 \end{cases}$$

除了可以写为向量形式 $\sum_{j=1}^{n}x_j\vec{A}^{(j)}=\mathbf{0}_m$ 外, 还可以写为乘法形式

$$A\mathbf{x}=\mathbf{0}_m,$$

其中 $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)^t$. 类似地, 设 $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^m$. 则以 $(A|\mathbf{b})$ 为增广矩阵的线性方程组, 除了可以写为向量形式 $\sum_{j=1}^{n}x_j\vec{A}^{(j)}=\mathbf{b}$ 外, 还可以写为乘法形式

$$A\mathbf{x}=\mathbf{b}.$$

设 $\phi:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$ 是线性映射, 它在标准基下的矩阵是 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 则对任意 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$,

$$\phi(\mathbf{x})=A\mathbf{x}.$$

6.4 矩阵运算的规律

加法. 设 $A,B,C\in\mathbb{R}^{m\times n}$.

(A1) 交换律: $A+B=B+A$.

(A2) 结合律: $(A+B)+C=A+(B+C)$.

(A3) 加法单位元: $A+O_{m\times n}=A$.

(A4) 加法逆元: $A+(-A)=O_{m\times n}$.

数乘. 设 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ 和 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$.

(S1) 结合律: $(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A)$.

(S2) 数乘单位元: $1A=A$.

以上规律由实数的运算规律可直接推出.

命题 6.20 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times s}, B\in\mathbb{R}^{s\times k}, C\in\mathbb{R}^{k\times n}$. 则

$$(AB)C=A(BC).$$

证明. 考虑线性映射:

$$\phi_A:\mathbb{R}^s\longrightarrow\mathbb{R}^m,\ \ \phi_B:\mathbb{R}^k\longrightarrow\mathbb{R}^s,\ \ \phi_C:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^k.$$

我们有交换图:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\phi_C"] \arrow[dr, blue, "\phi_B\circ\phi_C=\phi_{BC}"'] & \mathbb{R}^k \arrow[d, "\phi_B"] \arrow[dr, red, "\phi_A\circ\phi_B=\phi_{AB}"] & \\
 & \mathbb{R}^s \arrow[r, "\phi_A"] & \mathbb{R}^m.
\end{tikzcd}$$

根据第一章第二讲定理 4.11, $(\phi_A\circ\phi_B)\circ\phi_C=\phi_A\circ(\phi_B\circ\phi_C)$. 由矩阵乘法的定义可知,

$$(\phi_A\circ\phi_B)\circ\phi_C=\phi_{AB}\circ\phi_C=\phi_{(AB)C}$$

和

$$\phi_A \circ (\phi_B \circ \phi_C) = \phi_A \circ \phi_{BC} = \phi_{A(BC)}.$$

于是, $\phi_{(AB)C}=\phi_{A(BC)}$. 根据上一讲定理 6.5, $(AB)C=A(BC)$. □

乘法. 设 $A \in \mathbb{R}^{m\times s}, B \in \mathbb{R}^{s\times k}, C \in \mathbb{R}^{k\times n}$.

(M1) 结合律: $(AB)C = A(BC)$.

(M2) 数乘单位元: $E_m A = AE_s = A$.

加法与数乘的分配律. 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 和 $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

(AS1) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

(AS2) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$.

数乘与乘法的分配律. 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $A \in \mathbb{R}^{m\times s}, B \in \mathbb{R}^{s\times n}$.

(SM) $(\alpha A)(\beta B) = (\alpha\beta)AB$.

加法与乘法的分配律. 设 $A, B\in\mathbb{R}^{m\times n}$, $C\in\mathbb{R}^{k,m}$, $D\in\mathbb{R}^{n\times \ell}$.

(AM1) 左分配律: $C(A + B) = CA + CB$.

(AM2) 右分配律: $(A + B)D = AD + BD$.

我们来验证 (AM1). 其它验证或者是直接的或者与下述验证类似.

设 $A=(a_{i,j})_{m\times n}$, $B=(b_{i,j})_{m\times n}$, $C=(c_{p,i})_{p\times m}$ 和 $G=C(A+B)=(g_{p,j})_{k\times n}$. 则

$$g_{p,j}=\sum_{i=1}^{m}c_{p,i}(a_{i,j}+b_{i,j})=\underbrace{\sum_{i=1}^{m}c_{p,i}a_{i,j}}_{CA\text{ 中 }i\text{ 行 }j\text{ 列处元素}}+\underbrace{\sum_{i=1}^{m}c_{p,i}b_{i,j}}_{CB\text{ 中 }i\text{ 行 }j\text{ 列处元素}}.$$

因为 $p=1,\ldots,m$ 和 $j=1,\ldots,n$, 所以 $G=CA+CB$.

转置的计算规律

(AT) 设 $A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 则 $(A+B)^t=A^t+B^t$.

(ST) 设 $\alpha\in\mathbb{R}$ 和 $A\in\mathbb{R}^{m\times n}$. 则 $(\alpha A)^t=\alpha A^t$

(MT) 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times s},B\in\mathbb{R}^{s\times n}$. 则 $(AB)^t=B^tA^t$.

规律 (AT) 和 (ST) 可直接验证, (MT) 验证如下:

设 $A=(a_{i,k})_{m\times s}$, $B=(b_{k,j})_{s\times n}$, $C=(c_{i,j})_{m\times n}=AB$. 再设 $A^t=(a'_{k,i})_{s\times m}$ 和 $B^t=(b'_{j,k})_{n\times s}$. 则 $a'_{k,i}=a_{i,k}$ 和 $b'_{j,k}=b_{k,j}$. 令 $D=(d_{j,i})_{n\times m}=B^tA^t$. 我们计算

$$d_{j,i}=\sum_{k=1}^{s}b'_{j,k}a'_{k,i}=\sum_{k=1}^{s}a_{i,k}b_{k,j}=c_{i,j}.$$

故 $C^t=D$. $\square$

最后, 我们来看矩阵乘积对秩的影响.

定理 6.21 设 $A\in\mathbb{R}^{m\times s},B\in\mathbb{R}^{s\times n}$. 则

(i) $\mathrm{rank}(AB) \le \min(\mathrm{rank}(A), \mathrm{rank}(B))$*;*

(ii) $\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) - s \le \mathrm{rank}(AB)$ *(Sylvester 不等式).*

证明. 考虑线性映射 $\phi_A : \mathbb{R}^s \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 和 $\phi_B : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^s$. 我们有下列交换图:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "\phi_B"] \arrow[dr, "\phi_{AB}=\phi_A\circ\phi_B"'] & \mathbb{R}^s \arrow[d, "\phi_A"] \\
& \mathbb{R}^m.
\end{tikzcd}$$

(i) 直接计算得:

$$\begin{aligned}
\mathrm{rank}(AB) &= \dim(\mathrm{im}(\phi_{AB})) \quad (\text{命题 } 6.6 \text{ (i)}) \\
&= \dim(\phi_A(\mathrm{im}(\phi_B)) \quad (\mathrm{im}(\phi_{AB}) = \phi_A(\mathrm{im}(\phi_B)) \\
&\le \dim(\mathrm{im}(\phi_B)) \quad (\text{命题 } 5.13 \text{ (i)}) \\
&= \mathrm{rank}(B) \quad (\text{命题 } 6.6 \text{ (i)}).
\end{aligned}$$

类似地,

$$\begin{aligned}
\mathrm{rank}(AB) &= \dim(\phi_A(\mathrm{im}(\phi_B)) \quad (\text{见上面的计算}) \\
&\le \dim(\phi_A(\mathbb{R}^s)) \quad (\mathrm{im}(\phi_B) \subset \mathbb{R}^s) \\
&= \dim(\mathrm{im}(\phi_A)) \quad (\phi_A(\mathbb{R}^s) = \mathrm{im}(\phi_A)) \\
&= \mathrm{rank}(A) \quad (\text{命题 } 6.6 \text{ (i)}).
\end{aligned}$$

(i) 成立.

(ii) 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d$ 是 $\ker(\phi_A) \cap \mathrm{im}(\phi_B)$ 的一组基, $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d$ 是 $\mathrm{im}(\phi_B)$ 的一组基. 则 $\mathrm{rank}(B) = d + k$.

断言. $\mathrm{rank}(AB) \geq k$.

断言的证明. 设 $\alpha_1\phi_A(\mathbf{u}_1) + \cdots + \alpha_k\phi_A(\mathbf{u}_k) = \mathbf{0}_m$, 其中 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. 则 $\phi_A(\mathbf{u}) = \mathbf{0}_m$, 其中 $\mathbf{u} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{u}_k$. 故 $\mathbf{u} \in \mathrm{im}(\phi_B) \cap \ker(\phi_A)$. 于是, $\mathbf{u} \in \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d \rangle$. 因为 $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_d$ 线性无关, 所以 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$. 于是, $\phi_A(\mathbf{u}_1), \ldots, \phi_A(\mathbf{u}_k)$ 是 $\mathrm{im}(\phi_{AB})$ 中的一组线性无关向量. 故 $\dim(\mathrm{im}(\phi_{AB})) \geq k$. 从而, $\mathrm{rank}(AB) \geq k$. 断言成立.

由对偶定理(线性映射版)可知,

$$\mathrm{rank}(A) = s - \dim(\ker(\phi_A)) \leq s - d.$$

于是

$$\mathrm{rank}(B) + \mathrm{rank}(A) - s \leq d + k + s - d - s = k.$$

根据上述断言, (ii) 成立. □

注解 6.22 *上述证明中的断言可以加强为* $\mathrm{rank}(AB) = k$.

推论 6.23 *设* $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, B *是* m *阶满秩方阵*, C *是* n *阶满秩方阵. 则* $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(BA) = \mathrm{rank}(AC)$.

证明. 由上述定理的两个不等式可知

$$\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(B) - m \leq \mathrm{rank}(BA) \leq \min(\mathrm{rank}(B), \mathrm{rank}(A)).$$

因为 $\mathrm{rank}(B)=m$, 所以 $\mathrm{rank}(A)\leq\mathrm{rank}(BA)\leq\mathrm{rank}(A)$. 故 $\mathrm{rank}(BA)=\mathrm{rank}(A)$. 另一个等式可以类似地证明. $\square$

7 方阵

实数上所有方阵的集合记为 $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

7.1 $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 上的运算

对于任意 $A,B,C\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, 我们有

(A1) $A+B=B+A$;

(A2) $(A+B)+C=A+(B+C)$;

(A3) $A+O=A$, 其中 O 是 n 阶零矩阵;

(A4) $A+(-A)=O$.

(M1) $(AB)C=A(BC)$;

(M2) $AE=EA=A$, 其中 E 是 n 阶单位矩阵.

(S1) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$;

(S2) $1A=A$.

(AM) $A(B+C)=AB+AC$; $(A+B)C=AC+BC$.

(AS) $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$; $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$.

(MS) $(\lambda A)(\mu B) = \lambda(A(\mu B)) = (\lambda\mu)(AB)$.

我们把 $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 称为 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶矩阵代数.

记号. 设 $k \in \mathbb{Z}^+$, $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 根据乘法结合律, 我们定义:

$$A^k := \underbrace{A \cdots A}_{k}.$$

此外 $A^0 := E$. 可直接验证 $A^k A^\ell = A^{k+\ell}$ 和 $A^{k\ell} = (A^k)^\ell$.

例 7.1 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 展开 $(A+B)^2$ 和 $(A+B)(A-B)$.

解. $(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + BA + B^2$.
$(A+B)(A-B) = A^2 + BA - AB - B^2$.

只有当 $AB = BA$ 时, 我们才有

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad \text{和} \quad (A+B)(A-B) = A^2 - B^2.$$

定义 7.2 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 如果 $A^t = A$, 则称 A 是对称矩阵. 如果 $A^t = -A$, 则称 A 是斜对称矩阵. 如果存在 $k \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $A^k = O$. 则称 A 是幂零矩阵. 如果 $A^2 = A$, 则称 A 是幂等矩阵.

注解 7.3 设 $A = (a_{i,j}) \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 则 A 对称当且仅当 $a_{i,j} = a_{j,i}$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. 而 A 斜对称当且仅当 $a_{i.i} = 0$ 且

$a_{i,j} = -a_{j,i}$, 其中 $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 且 $i \neq j$. 我们来验证关于斜对称的必要充分条件如下

$$A = -A^t \iff A + A^t = O$$
$$\iff a_{i,j} + a_{j,i} = 0,\ i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$
$$\iff 2a_{i,i} = 0, a_{i,j} + a_{j,i} = 0,\ i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, i \neq j$$
$$\iff a_{i,i} = 0, a_{i,j} + a_{j,i} = 0,\ i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, i \neq j \quad (2 \neq 0).$$

例 7.4 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

可直接验证 A 是幂零的和 B 是幂等的.

例 7.5 设 $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. 则 $A^k = \mathrm{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$.

例 7.6 设

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

对任意 $n \in \mathbb{N}$, 计算 A^n.

解. 显然有 $A^0 = E_2$ 和 $A^1 = A$. 我们计算

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & c(a+b) \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}.$$

和

$$A^3 = \begin{pmatrix} a^2 & c(a+b) \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & c(a^2+ab+b^2) \\ 0 & b^3 \end{pmatrix}.$$

下面我们证明: 当 $n > 0$ 时,

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & cd_n \\ 0 & b^n \end{pmatrix},$$

其中 $d_n = \sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i}$.

当 $n = 1, 2, 3$ 时结论成立. 设 $n > 3$ 且 $n-1$ 时结论成立. 则

$$A^n = A^{n-1}A = \begin{pmatrix} a^{n-1} & cd_{n-1} \\ 0 & b^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & ca^{n-1}+cbd_{n-1} \\ 0 & b^n \end{pmatrix}.$$

而

$$ca^{n-1}+cbd_{n-1} = c(a^{n-1}+b\sum_{i=0}^{n-2} a^i b^{n-2-i}) = c\sum_{i=0}^{n-1} a^i b^{n-1-i} = cd_n.$$

结论成立.

我们可以更简洁地把结果写成:

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & c\frac{a^n-b^n}{a-b} \\ 0 & b^n \end{pmatrix}, a \neq b, \quad 和 \quad A^n = \begin{pmatrix} a^n & nca^{n-1} \\ 0 & a^n \end{pmatrix}, a = b.$$

事实上, 这也包括了 $n = 1$ 的情形.

7.2 交换不变量与中心元

由第二章第四讲例 6.19 可知, 对 $A,B\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{rank}(AB)$ 可能不等于 $\mathrm{rank}(BA)$. 换言之, 秩关于矩阵乘法不是交换不变量.

定义 7.7 设 $A=(a_{i,j})\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 我们称 $\sum_{i=1}^n a_{i,i}$ 是 A 的迹 *(trace)*. 记为 $\mathrm{tr}(A)$.

可直接验证: 对任意 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}, A,B\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\mathrm{tr}(\alpha A+\beta B)=\alpha\mathrm{tr}(A)+\beta\mathrm{tr}(B).$$

命题 7.8 设 $A=(a_{i,j}), B=(b_{i,j})\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 则

$$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA).$$

证明. 设 $C=(c_{ij})=AB$ 和 $D=(d_{i,j})=BA$. 则

$$c_{i,i}=\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,i} \quad 和 \quad d_{i,i}=\sum_{k=1}^n b_{i,k}a_{k,i}.$$

于是,

$$\mathrm{tr}(C)=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n a_{i,k}b_{k,i} \quad 和 \quad \mathrm{tr}(D)=\sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n b_{i,k}a_{k,i}.$$

故 $\mathrm{tr}(C)=\mathrm{tr}(D)$. □

例 7.9 证明*: 对任意 $A,B\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $AB-BA\neq E$.*

证明. 我们计算 $\mathrm{tr}(AB-BA)=\mathrm{tr}(AB)-\mathrm{tr}(BA)=0$ *(命题 7.8)*. 但 $\mathrm{tr}(E)=n>0$. 故 $AB-BA\neq E$. □

定义 7.10 设 $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 如果对任意 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 我们有 $AC = CA$. 则称 C 是中心元.

定理 7.11 设 $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 则 C 是中心元当且仅当 C 是数乘矩阵.

为了证明每个中心元是数乘矩阵, 我们需要下述引理.

引理 7.12 *(搬运工引理)* 对任意 $i, j \in \{1, \ldots, k\}$, 设 $E_{i,j}^{(k)}$ 是在 i 行 j 列处的元素等于 1, 而其它元素都等于零的 k 阶方阵. 则对于 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$,

$$E_{i,j}^{(m)} A = \begin{pmatrix} O_{(i-1)\times n} \\ \vec{A}_j \\ O_{(m-i)\times n} \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad AE_{i,j}^{(n)} = (O_{m\times(j-1)}, \vec{A}^{(i)}, O_{m\times(n-j)}).$$

证明. 根据列向量乘法公式, $AE_{i,j}^{(n)}$ 中除第 j 列外都是 $\mathbf{0}_n$. 而第 j 列是 $A\mathbf{e}_i$=$\vec{A}^{(i)}$. 故第二个等式成立. 由此可知

$$(E_{i,j}^{(m)} A)^t = A^t E_{j,i}^{(m)} = (O_{n\times(i-1)}, \vec{A}_j^t, O_{n\times(m-i)}).$$

对上式再次转置得到

$$(E_{i,j}^{(m)} A) = (O_{n\times(i-1)}, \vec{A}_j^t, O_{n\times(m-i)})^t = \begin{pmatrix} O_{(i-1)\times n} \\ \vec{A}_j \\ O_{(m-i)\times n} \end{pmatrix}.$$

第一个等式成立. □

定理 7.11 的证明. 设 $C=\lambda E$. 则对任意 $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, $CA=\lambda A$ 且 $AC=\lambda A$. 故 $CA=AC$.

反之, 设 $C=(c_{i,j})\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 是中心元. 对任意 $i,j\in\{1,\dots,n\}$, $E_{i,j}^{(n)}C=CE_{i,j}^{(n)}$. 于是

$$\begin{pmatrix} O_{(i-1)\times n} \\ \vec{C}_j \\ O_{(n-i)\times n}\end{pmatrix}=(O_{n\times(j-1)},\vec{C}^{(i)},O_{n\times(n-j)}).$$

比较等式两侧矩阵的第 i 行可知, 当 $k\neq j$ 时, $c_{j,k}=0$; 当 $k=j$ 时, $c_{j,j}=c_{i,i}$. 于是, C 是数乘矩阵. □

7.3 可逆元

定义 7.13 设 $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 如果存在 $B\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 使得 $AB=BA=E$, 则称 A 是可逆矩阵. 此时, B 称为 A 的一个逆矩阵.

设 $BA=AB=E$ 且 $CA=AC=E$. 则

$$CAB=C\implies (CA)B=C\implies EB=C\implies B=C.$$

故上述定义中 B 是唯一的. 我们把 B 称为可逆矩阵的逆矩阵, 记为 A^{-1}.

定理 7.14 设 $A\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 则 A 可逆当且仅当 A 满秩.

证明. 设 A 可逆, 则 $AA^{-1}=E$. 根据定理 6.21 (i), $\mathrm{rank}(A)\geq \mathrm{rank}(AA^{-1})=\mathrm{rank}(E)=n$. 故 $\mathrm{rank}(A)=n$.

反之, 设 A 满秩. 则对任意 $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$, $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ 有解 (第二章第三讲推论 4.3). 设 $\mathbf{v}_j$ 是 方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{e}_j$ 的解, $j=1,2,\ldots,n$. 令 $B=(\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n)$. 则

$$AB=(A\mathbf{v}_1,\ldots,A\mathbf{v}_n)=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)=E.$$

由第二章第三讲例 3.15, $\mathrm{rank}(A^t)=n$. 由上述证明可知存在 $C\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 使得 $A^tC=E$. 故 $C^tA=E$ (见第二章第四讲命题 6.23). 由此得出, $C^tAB=B$. 从而,

$$C^t(AB)=C^tE=C^t=B.$$

我们得到 $BA=E$. 于是, A 可逆. □

注解 7.15 *上述定理也可以用线性映射证明如下: 如果 A 可逆, 则存在 $B\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 使得 $BA=AB=E$. 注意到 ϕ_A,ϕ_B 都是从 $\mathbb{R}^n$ 到自身的映射. 于是, $\phi_A\circ\phi_B=\phi_E$ 和 $\phi_B\circ\phi_A=\phi_E$. 因为 ϕ_E 是恒同映射, 所以 ϕ_A 是双射. 故 A 满秩. (第二章第四讲命题 6.10 (iii)).*

反之, 同样的命题蕴含 ϕ_A 是双射. 由第九周作业题 4 可知, ϕ_A^{-1} 是线性映射. 故存在 $B\in\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$, 使得 $\phi_A^{-1}=\phi_B$. 我们得出 $\phi_A\circ\phi_B=\phi_E$ 和 $\phi_B\circ\phi_A=\phi_E$. 于是, $AB=BA=E$.

推论 7.16 *矩阵 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 可逆当且仅当存在 $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 使得 $AB = E$ 或 $BA = E$.*

证明. 这是因为 $AB = E$ 或 $BA = E$ 都可推出 A 满秩. □

注解 7.17 *上述推论也可以根据第二章第三讲推论 5.15 推出. 这是因为 $\phi_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是单射当且仅当它是满射当且仅当它是双射.*

命题 7.18 *设 $A, B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 都可逆. 则*

(i) AB 可逆且它的逆是 $B^{-1}A^{-1}$;

(ii) A^{-1} 可逆且它的逆是 $(A^{-1})^{-1} = A$;

(iii) A^t 可逆且其逆是 $(A^{-1})^t$.

证明. (i) $AB(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = E$. 类似可验证 $(B^{-1}A^{-1})AB = E$.

(ii) 这是因为 $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

(iii) 由第二章第四讲命题 6.23 可知,

$$A^t(A^{-1})^t = (A^{-1}A)^t = E^t = E.$$

类似地, $(A^{-1})^tA^t = E$. □

注解 7.19 *上述命题中第一个结论实际上是逆映射的穿衣脱衣规则(第一章第二讲命题 4.14 (ii)), 而第二个结论对应着第一章第二讲命题 4.14 (i).*

例 7.20 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$. 则线性方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 确定当且仅当 A 可逆. 此时它的唯一解是 $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

例 7.21 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ 幂零. 证明 $E - A$ 可逆.

证明. 设 $A^k = O$, 其中 $k > 0$. 则

$$E = E - A^k = (E - A)(E + A + \cdots + A^{k-1}).$$

故 $(E - A)^{-1} = E + A + \cdots + A^{k-1}$. □

例 7.22 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_2(\mathbb{R}).$$

证明*:* 对 $m \in \mathbb{Z}^+$,

$$A^m = \begin{pmatrix} f_{m-1} & f_m \\ f_m & f_{m+1} \end{pmatrix},$$

其中 $f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1, f_{m+1} = f_m + f_{m-1}$.

证明. $m = 1$ 时, 结论显然. 设 $m > 1$ 且 $m - 1$ 时结论成立. 则

$$\begin{aligned} A^m = A^{m-1}A &= \begin{pmatrix} f_{m-2} & f_{m-1} \\ f_{m-1} & f_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} f_{m-1} & f_{m-1} + f_{m-2} \\ f_m & f_m + f_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{m-1} & f_m \\ f_m & f_{m+1} \end{pmatrix}. \quad \square \end{aligned}$$

设

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

和

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{\lambda_2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\sqrt{5}\lambda_1 & \sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

不难计算

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\frac{1}{5} \\ \sqrt{5}\lambda_1 & -\frac{\lambda_2}{5} \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad A = B^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} B.$$

验证:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\frac{1}{5} \\ \sqrt{5}\lambda_1 & -\frac{\lambda_2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{\lambda_2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\sqrt{5}\lambda_1 & \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5}(\lambda_1-\lambda_2) & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{5}(\lambda_1-\lambda_2) \end{pmatrix} = E_2$$

和

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\frac{1}{5} \\ \sqrt{5}\lambda_1 & -\frac{\lambda_2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{\lambda_2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\sqrt{5}\lambda_1 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \\ =&\begin{pmatrix} \sqrt{5}\lambda_1 & -\frac{1}{5}\lambda_2 \\ \sqrt{5}\lambda_1^2 & -\frac{\lambda_2^2}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{\lambda_2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\sqrt{5}\lambda_1 & \sqrt{5} \end{pmatrix} \\ =&\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{5}}{5}(\lambda_1-\lambda_2) \\ \frac{\sqrt{5}}{5}\lambda_1\lambda_2(\lambda_2-\lambda_1) & \frac{\sqrt{5}}{5}(\lambda_1^2-\lambda_2^2) \end{pmatrix} = A. \end{aligned}$$

注意到: 对任意 $C \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\left(B^{-1}CB\right)^m = B^{-1}C^mB.$$

故

$$A^m = B^{-1}\mathrm{diag}(\lambda_1^m, \lambda_2^m)B.$$

于是,

$$f_m = \left(\sqrt{5}\lambda_1^m, -\frac{1}{5}\lambda_2^m\right)\vec{B}^{(2)} = \frac{\sqrt{5}}{5}(\lambda_1^m - \lambda_2^m).$$

于是, *Fibonacci* 序列的闭形式是

$$f_m = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m\right).$$

注意到 $f_0 = 0, f_1 = 1, f_2 = 1, f_3 = 2, f_4 = 3, \ldots, f_{10} = 55$. 但 $f_{50} = 12586269025$. 渐近公式是

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f_m}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Longrightarrow f_m \sim \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m.$$

小结. *Fibonacci* 序列:

$$\underbrace{f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_{m+1} = f_m + f_{m-1}}_{\text{递归公式}},$$

$$\underbrace{f_m = \frac{\sqrt{5}}{5}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^m\right)}_{\text{闭形式}},$$

和

$$\underbrace{f_m \sim \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^m}_{\text{渐进公式}}.$$