

## 第二章 矩阵

### 8 矩阵的初等等价

**定义 8.1** 设  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . 如果存在  $m$  阶可逆方阵  $P$  和  $n$  阶可逆方阵  $Q$  使得  $A = PBQ$ . 则称  $A$  与  $B$  初等等价. 记为  $A \sim_e B$ .

我们来验证  $\sim_e$  是等价关系. 对任意  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , 我们有  $A = E_m A E_n$ . 于是,  $A \sim_e A$ . 自反性成立.

再设  $B \in \mathbb{R}^{m \times n}$  满足  $A \sim_e B$ . 则存在  $m$  阶可逆方阵  $P$  和  $n$  阶可逆方阵  $Q$  使得  $A = PBQ$ . 则  $B = P^{-1}AQ^{-1}$ . 故  $B \sim_e A$ . 对称性成立.

设  $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$  且  $A \sim_e B$  和  $B \sim_e C$ . 则存在  $m$  阶可逆方阵  $P$  和  $n$  阶可逆方阵  $Q$  使得  $A = PBQ$  和  $B = SCT$ . 故  $A = (PS)C(TQ)$ . 因为可逆方阵的积仍可逆, 所以  $A \sim_e C$ . 传递性成立.

我们将证明

**定理 8.2** 设  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . 则  $A \sim_e B \iff \text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ .

为此, 我们需要用矩阵乘法来解释初等变换.

**定义 8.3** 设  $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

(i)  $F_{i,j}^{(n)}$  是把  $E_n$  中第  $i$  行和第  $j$  行互换的得到的矩阵. 称之为第一类初等矩阵.

(ii) 设  $\alpha \in \mathbb{R}$  且  $i \neq j$ . 则  $F_{i,j}^{(n)}(\alpha)$  是把  $E_n$  中第  $j$  行通乘  $\alpha$  加到第  $i$  行得到的矩阵. 称之为第二类初等矩阵.

(iii) 设  $\lambda \in \mathbb{R}$  且  $\lambda \neq 0$ . 则  $F_i^{(n)}(\lambda)$  是把  $E_n$  中第  $i$  行通乘  $\lambda$  得到的矩阵. 称之为第三类初等矩阵.

这三类矩阵统称为  $n$  阶初等矩阵.

**注解 8.4** 可直接验证  $(F_{i,j}^{(n)})^2 = E_n$ ,  $F_{i,j}^{(n)}(\alpha)F_{i,j}^{(n)}(-\alpha) = E_n$ , 和  $F_i^{(n)}(\lambda)F_i^{(n)}(\lambda^{-1}) = E_n$ . 故初等矩阵都是可逆的, 且它们的逆也是初等矩阵.

我们可以通过搬运工引理(上一讲引理 7.12)中定义矩阵  $E_{i,j}^{(k)}$  表示初等矩阵如下:

$$F_{i,j}^{(n)} = E_n - E_{i,i}^{(n)} - E_{j,j}^{(n)} + E_{i,j}^{(n)} + E_{j,i}^{(n)}, \quad (1)$$

$$F_{i,j}^{(n)}(\alpha) = E_n + \alpha E_{i,j}^{(n)}, \quad (2)$$

$$F_i^{(n)}(\lambda) = E_n + (\lambda - 1)E_{i,i}^{(n)}. \quad (3)$$

设  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . 根据 (1),

$$F_{i,j}^{(m)} A = A - E_{i,i}^{(m)} A - E_{j,j}^{(m)} A + E_{i,j}^{(m)} A + E_{j,i}^{(m)} A.$$

根据搬运工引理,  $F_{i,j}^{(m)}A$  是把  $A$  中  $i, j$  两行对换得到的矩阵. 根据 (2),

$$F_{i,j}^{(m)}(\alpha)A = A + \alpha E_{i,j}^{(m)}A.$$

同理,  $F_{i,j}^{(m)}(\alpha)A$  是把  $A$  中第  $j$  行乘以  $\alpha$  后加到第  $i$  行得到的矩阵. 根据 (3),

$$F_i^{(m)}(\lambda)A = A + (\lambda - 1)E_{i,i}^{(m)}A.$$

从而得到把  $A$  中第  $i$  行通乘  $\lambda$  的矩阵.

类似地,  $AF_{i,j}^{(n)}$ ,  $AF_{i,j}^{(n)}(\alpha)$  和  $AF_i^{(n)}(\lambda)$  分别是把  $A$  中  $i, j$  两行对换, 把  $A$  中第  $i$  列乘以  $\alpha$  后加到第  $j$  列, 和把  $A$  中第  $i$  列通乘  $\lambda$  后得到的矩阵.

**引理 8.5 (打洞引理)** 设  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . 则存在可逆矩阵  $P \in M_m(\mathbb{R})$  和  $Q \in M_n(\mathbb{R})$ , 其中  $P$  和  $Q$  都是初等矩阵的乘积, 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O_{r \times (n-r)} \\ O_{(m-r) \times r} & O_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix},$$

且  $\text{rank}(A) = r$ .

**证明.** 根据第一章第一讲命题 2.3 和第三类初等行变换,

存在若干个  $m$  阶初等矩阵, 使得它们的积  $P$  满足

$$PA = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 & 1 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 \cdots 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

其中共有  $r$  行非零. 则存在若干个  $n$  阶第一类初等矩阵, 使得它们的积  $Q_1$  满足

$$PAQ_1 = \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 1 & \cdots & * & * & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & * & \cdots & * & * & * & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

进而存在若干个  $n$  阶第一类初等矩阵, 使得它们的积  $Q_2$

满足

$$PAQ_1Q_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \cdots 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \cdots 0 \end{pmatrix}.$$

再令  $Q = Q_1Q_2$  即可, 这是因为初等矩阵之积必然可逆. 根据第二章第五讲推论 6.27,  $\text{rank}(A) = r$ .  $\square$

**注解 8.6** 打洞引理也可写成:

设  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  和  $\text{rank}(A) = r$ . 则

$$A = P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q,$$

其中  $P \in M_m(\mathbb{R})$  可逆,  $Q \in M_n(\mathbb{R})$  可逆.

第二章第五讲定理 8.2 的证明. 设  $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . 如果  $A \sim_e B$ , 则存在可逆矩阵  $P \in M_m(\mathbb{R})$  和  $Q \in M_n(\mathbb{R})$  使得  $A = PBQ$ . 则第二章第五讲推论 6.27 蕴含  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ .

反之, 设  $\text{rank}(A) = \text{rank}(B)$ . 记为  $r$ . 根据引理 8.5,

$$A \sim_e \begin{pmatrix} E_r & O_{r \times (n-r)} \\ O_{(m-r) \times r} & O_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix}, B \sim_e \begin{pmatrix} E_r & O_{r \times (n-r)} \\ O_{(m-r) \times r} & O_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix}.$$

根据传递性, 我们有  $A \sim_e B$ .  $\square$

**注解 8.7** 由上述证明过程可知,  $PA$  是阶梯型.

**推论 8.8** 可逆矩阵是若干初等矩阵之积.

证明. 设  $A$  可逆. 则  $A$  满秩. 由打洞引理的证明可知, 存在初等矩阵  $P_1, \dots, P_k, Q_1, \dots, Q_\ell$  使得

$$P_k \cdots P_1 A Q_1 \cdots Q_\ell = E.$$

故

$$A = (P_k \cdots P_1)^{-1} (Q_1 \cdots Q_\ell)^{-1} = P_1^{-1} \cdots P_k^{-1} Q_\ell^{-1} \cdots Q_1^{-1}.$$

因为初等矩阵的逆还是初等矩阵, 所以推论成立.  $\square$

## 9 矩阵求逆

**引理 9.1** 设  $A \in \mathbb{R}^{m \times s}, B \in \mathbb{R}^{s \times n}$ . 设

$$B = (B_1, \dots, B_k),$$

其中  $B_\ell \in \mathbb{R}^{s \times n_\ell}, \ell = 1, \dots, k$ . 则

$$AB = (AB_1, \dots, AB_k).$$

证明. 由列向量乘积公式(第二章第四讲注解 6.17 (ii))

$$AB = (A\vec{B}^{(1)}, \dots, A\vec{B}^{(n)}).$$

故

$$AB = \left( A \underbrace{(\vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(n_1)})}_{B_1}, \dots, A \underbrace{(\vec{B}^{(n_1+\dots+n_{k-1}+1)}, \dots, \vec{B}^{(n)})}_{B_k} \right). \quad \square$$

**命题 9.2** 设  $A \in M_n(\mathbb{R})$  可逆,  $B = (A, E_n) \in \mathbb{R}^{n \times 2n}$ ,  $P \in M_n(\mathbb{R})$ . 如果

$$PB = (E_n | Q),$$

则  $P = Q = A^{-1}$ .

证明. 由上述引理可知,  $PB = P(A, E_n) = (PA, P)$ . 于是,  $PA = E_n$  和  $P = Q$ . 根据第二章第五讲命题 7.18,  $P = A^{-1}$ .  $\square$

设  $A$  可逆. 则  $A^{-1}$  是若干初等矩阵  $C_1, \dots, C_k$  之积(推论 8.8). 由上述命题可知:

$$(C_1 \cdots C_k)(A | E_n) = (E_n | A^{-1}).$$

于是, 对  $(A | E_n)$  做初等行变换必然可以把它的前  $n$  列组成的子矩阵化为单位矩阵, 后  $n$  列组成的子矩阵就是  $A^{-1}$ .

**例 9.3** 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

计算  $A^{-1}$ .

解. 我们计算

$$\begin{aligned} (A|E) &\xrightarrow{F_{1,2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{F_{3,1}(-2)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{F_2(\frac{1}{2})} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & | & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{F_{3,2}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{F_{1,2}(-1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{F_{1,3}(1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & \frac{1}{2} & -2 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$



于是,

$$A^{-1} = F_{1,3}(1)F_{1,2}(-1)F_{3,2}(1)F_2\left(\frac{1}{2}\right)F_{3,1}(-2)F_{1,2}.$$

另一种常见的矩阵求逆的方法如下: 设  $A \in M_n(\mathbb{R})$ . 设  $k$  是最小的正整数使得  $A^0, A^1, \dots, A^k$  在  $\mathbb{R}$  上“线性相关”. 即存在  $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$  且  $\alpha_k \neq 0$  使得

$$\alpha_k A^k + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 E = O. \quad (4)$$

我们有下述结论:

**命题 9.4** 利用以上记号, 则  $A$  可逆当且仅当  $\alpha_0 \neq 0$ . 此时

$$A^{-1} = -\alpha_0^{-1}(\alpha_1 E + \dots + \alpha_k A^{k-1}).$$

证明. 设  $\alpha_0 \neq 0$ . 由 (4) 可知,

$$A(\alpha_1 E + \dots + \alpha_k A^{k-1}) = -\alpha_0 E \implies \underbrace{A(-\alpha_0^{-1})(\alpha_1 E + \dots + \alpha_k A^{k-1})}_B = E.$$

于是,  $A$  可逆且  $B = A^{-1}$  (第二章第五讲命题 7.18).

反之, 设  $A$  可逆. 假设  $\alpha_0 = 0$ . 则

$$A(\alpha_k A^{k-1} + \dots + \alpha_2 A + \alpha_1 E) = O.$$

两侧同乘  $A^{-1}$  得到

$$\alpha_k A^{k-1} + \dots + \alpha_2 A + \alpha_1 E = O.$$

因为  $\alpha_k \neq 0$ , 我们得到与  $k$  的极小性相矛盾的结果.  $\square$

例 9.5 设

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

确定  $A_n$  是否可逆并当可逆时计算  $A_n^{-1}$ .

解. 注意到  $E_n$  和  $A_n$  在  $\mathbb{R}$  上“线性无关”. 计算

$$\begin{aligned} A_n^2 &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n & n-4 & n-4 & \cdots & n-4 & n-4 \\ n-4 & n & n-4 & \cdots & n-4 & n-4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-4 & n-4 & n-4 & \cdots & n & n-4 \\ n-4 & n-4 & n-4 & \cdots & n-4 & n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (2n-4) - (n-4) & n-4 & \cdots & n-4 \\ n-4 & (2n-4) - (n-4) & \cdots & n-4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-4 & n-4 & \cdots & (2n-4) - (n-4) \end{pmatrix} \\ &= (2n-4)E_n - (n-4)A_n. \end{aligned}$$

我们得到  $A_n^2 + (n-4)A_n - (2n-4)E_n = O$ . 由命题 9.4 可

知,  $A_2$  不可逆且  $n \neq 2$  时,  $A_n$  可逆. 此时,

$$A_n^{-1} = \frac{1}{2n-4}(A_n + (n-4)E_n).$$

## 10 矩阵分块

### 10.1 基本公式

引理 10.1 设  $A \in \mathbb{R}^{m \times s}$  和  $B \in \mathbb{R}^{s \times n}$ . 令

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_p \end{pmatrix}, \quad B = (B_1, \dots, B_q).$$

则  $AB = (A_k B_\ell)_{p \times q}$ .

证明. 断言:

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \vdots \\ A_p B \end{pmatrix}.$$

断言的证明. 根据引理 9.1. 我们计算

$$(AB)^t = B^t A^t = B^t (A_1^t, \dots, A_p^t) = (B^t A_1^t, \dots, B^t A_p^t).$$

于是,

$$AB = (B^t A_1^t, \dots, B^t A_p^t)^t = \begin{pmatrix} (B^t A_1^t)^t \\ \vdots \\ (B^t A_p^t)^t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \vdots \\ A_p B \end{pmatrix}.$$

断言成立.

由此和引理 9.1 可知,

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 B \\ \vdots \\ A_p B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1(B_1, \dots, B_q) \\ \vdots \\ A_p(B_1, \dots, B_q) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 B_1 & \dots & A_1 B_q \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_p B_1 & \dots & A_p B_q \end{pmatrix}. \quad \square$$

**引理 10.2** 设  $A \in \mathbb{R}^{m \times s}$  和  $B \in \mathbb{R}^{s \times n}$ . 令

$$A = (A_1, \dots, A_k) \quad B = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_k \end{pmatrix},$$

其中  $A_i \in \mathbb{R}^{m \times s_i}$ ,  $B_i \in \mathbb{R}^{s_i \times n}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . 则

$$AB = A_1 B_1 + \dots + A_k B_k.$$

证明. 设  $A = (a_{i,\ell})_{m \times s}$  和  $B = (b_{\ell,j})_{s \times n}$ .

先考虑  $k = 2$  的情形. 令

$$C = (c_{i,j})_{m \times n} = AB \quad \text{和} \quad D = (d_{i,j})_{m \times n} = A_1 B_1 + A_2 B_2.$$

则对任意  $i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\}$ ,

$$d_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{s_1} a_{i,\ell} b_{\ell,j} + \sum_{\ell=s_1+1}^{s_1+s_2} a_{i,\ell} b_{\ell,j} = \sum_{\ell=1}^s a_{i,\ell} b_{\ell,j} = c_{i,j}.$$

结论成立.

设  $k > 2$  且结论对  $k - 1$  成立. 记

$$\tilde{A} = (A_1, \dots, A_{k-1}), \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_{k-1} \end{pmatrix}.$$

则  $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{m \times (s-s_n)}$ ,  $\tilde{B} \in \mathbb{R}^{(s-s_n) \times n}$ . 于是

$$AB = \tilde{A}\tilde{B} + A_k B_k = A_1 B_1 + \dots + A_{k-1} B_{k-1} + A_k B_k,$$

其中第一个等式来自  $k = 2$  时的结论, 第二个等式来自归纳假设.  $\square$

**定理 10.3** 设  $A \in \mathbb{R}^{m \times s}$  和  $B \in \mathbb{R}^{s \times n}$ . 令

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,k} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ A_{\ell,1} & \cdots & A_{\ell,k} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,p} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ B_{k,1} & \cdots & B_{k,p} \end{pmatrix},$$

其中  $A_{i,q} \in \mathbb{R}^{m_i \times s_q}$ ,  $B_{q,j} \in \mathbb{R}^{s_q \times n_j}$ ,  $i = 1, 2, \dots, \ell$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$ ,  $q = 1, \dots, k$ . 则

$$AB = \left( \sum_{q=1}^k A_{i,q} B_{q,j} \right)_{1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq p}.$$

证明. 设

$$A_i = (A_{i,1}, \dots, A_{i,k}), \quad i = 1, \dots, \ell, \quad B_j = \begin{pmatrix} B_{1,j} \\ \vdots \\ B_{k,j} \end{pmatrix}, \quad j = 1, \dots, p.$$

根据引理 10.1,

$$AB = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_\ell \end{pmatrix} (B_1, \dots, B_p) = (A_i B_j)_{1 \leq i \leq \ell, 1 \leq j \leq p}.$$

根据引理 10.2,

$$A_i B_j = \left( A_{i,1}, \dots, A_{i,k} \right) \begin{pmatrix} B_{1,j} \\ \vdots \\ B_{k,j} \end{pmatrix} = \sum_{q=1}^k A_{i,q} B_{q,j}. \quad \square$$

**例 10.4** 设分块对角矩阵

$$A = \begin{pmatrix} D_1 & O & \cdots & O \\ O & D_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & D_k \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}),$$

其中  $D_i \in M_{n_i}(\mathbb{R})$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . 则对任意  $m \in \mathbb{Z}^+$ ,

$$A^m = \begin{pmatrix} D_1^m & O & \cdots & O \\ O & D_2^m & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & D_k^m \end{pmatrix}.$$

**例 10.5** 设分块对角矩阵

$$P = \begin{pmatrix} M & O \\ O & N \end{pmatrix} \in M_m(\mathbb{R}),$$

其中  $M \in M_p(\mathbb{R}), N \in M_q(\mathbb{R}), p + q = m$ . 设

$$A = \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} \\ A_{2,1} & A_{2,2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n},$$

其中  $A_{1,1}$  有  $p$  行,  $A_{2,2}$  有  $q$  行. 则

$$PA = \begin{pmatrix} MA_{1,1} & MA_{1,2} \\ NA_{2,1} & NA_{2,2} \end{pmatrix}.$$

类似地, 设

$$Q = \begin{pmatrix} S & O \\ O & T \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}),$$

其中  $S$  的行数与  $A_{1,1}$  的列数相同,  $T$  的行数与  $A_{2,2}$  的列数相同. 则

$$AQ = \begin{pmatrix} A_{1,1}S & A_{1,2}T \\ A_{2,1}S & A_{2,2}T \end{pmatrix}.$$

应用打洞引理时, 下列公式是有用的. 其证明是引理 10.1 的简单应用.

$$\begin{pmatrix} E_r & O_{r \times p} \\ O_{q \times r} & O_{p \times q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r \\ O_{q \times r} \end{pmatrix} (E_r, O_{r \times p}). \quad (5)$$

**例 10.6** (矩阵乘法分解) 设  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  且  $\text{rank}(A) = r > 0$ . 则

$$A = BC$$

其中  $B \in \mathbb{R}^{m \times r}$  和  $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$ .

证明. 根据引理 8.5 和 (5), 存在  $m$  阶可逆矩阵  $P$  和  $n$  阶可逆矩阵  $Q$  使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} E_r & O_{r \times (n-r)} \\ O_{(m-r) \times r} & O_{(m-r) \times (n-r)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r \\ O_{(m-r) \times r} \end{pmatrix} (E_r, O_{r \times (n-r)}).$$

于是,

$$A = \underbrace{P^{-1} \begin{pmatrix} E_r \\ O_{(m-r) \times r} \end{pmatrix}}_B \underbrace{(E_r, O_{r \times (n-r)})}_{C} Q^{-1}.$$

**例 10.7** 设  $A \in M_n(\mathbb{R})$ ,  $X$  是  $n$  阶未知方阵. 解矩阵方程

$$AXA = A.$$

解. 由打洞引理, 存在可逆矩阵  $P, Q \in M_n(\mathbb{R})$  使得

$$A = P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q.$$

代入原方程得

$$\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Y \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

其中  $Y = QXP$ . 设

$$Y = \begin{pmatrix} Y_{1,1} & Y_{1,2} \\ Y_{2,1} & Y_{2,2} \end{pmatrix},$$



其中  $Y_{1,1} \in M_r(\mathbb{R})$ . 则上述方程化简为:

$$\begin{pmatrix} Y_{1,1} & O \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

于是  $Y_{1,1} = E_r$ , 其它元素任意. 故

$$X = P \begin{pmatrix} E_r & Y_{1,2} \\ Y_{2,1} & Y_{2,2} \end{pmatrix} Q,$$

其中  $Y_{1,2} \in \mathbb{R}^{r \times (n-r)}$ ,  $Y_{2,1} \in \mathbb{R}^{(n-r) \times r}$ ,  $Y_{2,2} \in M_{n-r}(\mathbb{R})$  是任意矩阵.

## 10.2 矩阵秩的（不）等式

**引理 10.8** 设矩阵  $M$  具有以下四种分块形式之一

$$\begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} O & A \\ B & C \end{pmatrix}.$$

则  $\text{rank}(M) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$  且当  $C = O$  时等号成立.

证明. 这四种形式可以通过第一类初等变换和转置互相转化. 因为初等变换和转置不改变矩阵的秩, 所以不妨假设

$$M = \begin{pmatrix} A & O \\ C & B \end{pmatrix}.$$

设  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  和  $B \in \mathbb{R}^{k \times \ell}$ . 设  $\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(p)}$  是  $V_c(A)$  的一组基,  $\vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(q)}$  是  $V_c(B)$  的一组基.

断言. 列向量  $\vec{M}^{(1)}, \dots, \vec{M}^{(p)}, \vec{M}^{(n+1)}, \dots, \vec{M}^{(n+q)}$  线性无关.

断言的证明. 设  $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q \in \mathbb{R}$  使得

$$\alpha_1 \vec{M}^{(1)} + \dots + \alpha_p \vec{M}^{(p)} + \beta_1 \vec{M}^{(n+1)} + \dots + \beta_q \vec{M}^{(n+q)} = \mathbf{0}_{m+k}.$$

则

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \vec{A}^{(1)} \\ \vec{C}^{(1)} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_p \begin{pmatrix} \vec{A}^{(p)} \\ \vec{C}^{(p)} \end{pmatrix} + \beta_1 \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ \vec{B}^{(1)} \end{pmatrix} + \dots + \beta_q \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ \vec{B}^{(q)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_m \\ \mathbf{0}_k \end{pmatrix}.$$

于是,  $\alpha_1 \vec{A}^{(1)} + \dots + \alpha_p \vec{A}^{(p)} = \mathbf{0}_m$ . 故  $\alpha_1 = \dots = \alpha_p = 0$ .

进而  $\beta_1 \vec{B}^{(1)} + \dots + \beta_q \vec{B}^{(q)} = \mathbf{0}_k$ . 故  $\beta_1 = \dots = \beta_q = 0$ .

断言成立.

由断言可知,  $\text{rank}(M) \geq p + q = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$ .

设  $C = O_{k \times n}$ . 当  $j \in \{1, \dots, n\}$  时,

$$\vec{M}^{(j)} = \begin{pmatrix} \vec{A}^{(j)} \\ \mathbf{0}_k \end{pmatrix} \implies \vec{M}^{(j)} \in \langle \vec{M}^{(1)}, \dots, \vec{M}^{(p)} \rangle.$$

类似地, 当  $j \in \{n+1, \dots, n+\ell\}$  时,

$$\vec{M}^{(j)} \in \langle \vec{M}^{(n+1)}, \dots, \vec{M}^{(n+q)} \rangle.$$

根据断言,  $\text{rank}(M) = p + q = \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$ .  $\square$

**推论 10.9** 设上述引理中  $A$  和  $B$  是可逆方阵, 则  $M$  也是可逆方阵.

证明. 设  $A \in M_m(\mathbb{R})$  和  $B \in M_n(\mathbb{R})$ . 则  $M \in M_{m+n}(\mathbb{R})$ . 则  $\text{rank}(M) \leq m+n$  (第二章第三讲例 3.10). 由上述引理,  $\text{rank}(M) \geq m+n$ . 故  $\text{rank}(M) = m+n$ . 于是,  $M$  可逆(第二章第五讲定理 7.14).  $\square$

**例 10.10** 设  $A \in \mathbb{R}^{m \times s}$  和  $B \in \mathbb{R}^{s \times n}$ . 证明

$$\text{rank}(AB) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B) - s.$$

证明. 只要证  $\text{rank}(AB) + s \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(B)$ . 设

$$M = \begin{pmatrix} AB & O \\ O & E_s \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+s) \times (n+s)}.$$

根据引理 10.8,  $\text{rank}(M) = \text{rank}(AB) + s$ . 我们计算

$$N := \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_s \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} AB & O \\ O & E_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & A \\ O & E_s \end{pmatrix},$$

$$P := N \begin{pmatrix} E_n & O \\ -B & E_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} AB & A \\ O & E_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_n & O \\ -B & E_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O & A \\ -B & E_s \end{pmatrix}.$$

因为矩阵乘法不可能增加秩, 所以  $\text{rank}(M) \geq \text{rank}(P)$ . 由引理 10.8 得出,

$$\text{rank}(M) \geq \text{rank}(A) + \text{rank}(-B) = \text{rank}(A) + \text{rank}(B).$$

例 10.11 (Sylvester 等式) 设  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . 证明:

$$\text{rank}(E_m + AB) + n = \text{rank}(E_n + BA) + m.$$

证明. 设

$$M = \begin{pmatrix} E_m + AB & O \\ O & E_n \end{pmatrix} \in M_{m+n}(\mathbb{R}).$$

我们计算

$$N := \underbrace{\begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n \end{pmatrix}}_{C_1} M = \begin{pmatrix} E_m + AB & A \\ O & E_n \end{pmatrix},$$

$$P := N \underbrace{\begin{pmatrix} E_m & O \\ -B & E_n \end{pmatrix}}_{C_2} = \begin{pmatrix} E_m & A \\ -B & E_n \end{pmatrix},$$

$$Q := \underbrace{\begin{pmatrix} E_m & O \\ B & E_n \end{pmatrix}}_{C_3} P = \begin{pmatrix} E_m & A \\ O & E_n + BA \end{pmatrix},$$

$$R := Q \underbrace{\begin{pmatrix} E_m & -A \\ O & E_n \end{pmatrix}}_{C_4} = \begin{pmatrix} E_m & O \\ O & E_n + BA \end{pmatrix}.$$

注意到  $C_1, C_2, C_3, C_4 \in M_{m+n}(\mathbb{R})$  且引理 10.8 蕴含

$$\text{rank}(C_i) \geq \text{rank}(E_m) + \text{rank}(E_n) = m + n.$$

故  $C_1, C_2, C_3, C_4$  都满秩. 根据第二章第九讲推论 6.27,

$$\text{rank}(M) = \text{rank}(R).$$

再由引理 10.8 可知,

$$\text{rank}(M) = \text{rank}(R) \implies \text{rank}(E_m + AB) + n = \text{rank}(E_n + BA) + m.$$

## 第三章 行列式

### 1 多重线性斜对称函数

在本节中, 设  $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$  是  $\mathbb{R}^n$  的标准基.

#### 1.1 $\mathbb{R}^n$ 上的多重线性函数

定义 1.1 映射:

$$f: \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_m \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) \mapsto f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$$

称为  $m$  重线性的, 如果对任意  $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,  $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  和  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  我们有

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \alpha \mathbf{u} + \beta \mathbf{v}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m) \\ &= \alpha f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m) \\ &+ \beta f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{v}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m). \end{aligned}$$

例 1.2 一重线性函数就是  $\mathbb{R}^n$  上的线性函数. 设

$$\alpha_1 = f(\mathbf{e}_1), \dots, \alpha_n = f(\mathbf{e}_n) \in \mathbb{R}.$$

则

$$f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x_1, \dots, x_n)^t \mapsto \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n.$$

例 1.3 设

$$f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mapsto \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix},$$

其中

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

则  $f$  是  $\mathbb{R}^2$  上的二重线性函数.

验证. 设  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ,

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

则

$$\begin{aligned} f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \mathbf{y}) &= \det \begin{pmatrix} \alpha u_1 + \beta v_1 & y_1 \\ \alpha u_2 + \beta v_2 & y_2 \end{pmatrix} \\ &= (\alpha u_1 + \beta v_1)y_2 - (\alpha u_2 + \beta v_2)y_1 \\ &= \alpha(u_1y_2 - u_2y_1) + \beta(v_1y_2 - v_2y_1) \\ &= \alpha \det \begin{pmatrix} u_1 & y_1 \\ u_2 & y_2 \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} v_1 & y_1 \\ v_2 & y_2 \end{pmatrix} \\ &= \alpha f(\mathbf{u}, \mathbf{y}) + \beta f(\mathbf{v}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

类似地, 我们可验证  $f(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \beta f(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ .

故  $f$  是二重线性函数.

例 1.4 设  $f$  是  $\mathbb{R}^n$  上的二重线性函数,  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ,  $\alpha, \beta, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . 展开  $f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y})$ .

解. 利用多重线性计算:

$$\begin{aligned} & f(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}, \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) \\ &= \alpha f(\mathbf{u}, \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) + \beta f(\mathbf{v}, \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}) \quad (\text{关于第一个变元线性}) \\ &= \alpha(\lambda f(\mathbf{u}, \mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{u}, \mathbf{y})) + \beta(\lambda f(\mathbf{v}, \mathbf{x}) + \mu f(\mathbf{v}, \mathbf{y})) \\ &\quad (\text{关于第二个变元线性}) \\ &= \alpha\lambda f(\mathbf{u}, \mathbf{x}) + \alpha\mu f(\mathbf{u}, \mathbf{y}) + \beta\lambda f(\mathbf{v}, \mathbf{x}) + \beta\mu f(\mathbf{v}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

特别地

$$f(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{u}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{u}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{y})$$

和

$$f(\alpha\mathbf{u}, \alpha\mathbf{x}) = \alpha^2 f(\mathbf{u}, \mathbf{x}).$$

引理 1.5 设  $f$  是  $\mathbb{R}^n$  上  $m$  重线性函数,  $k \in \{1, \dots, m\}$ . 则

$$f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m) = 0.$$

证明. 我们计算

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m) \\ &= f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{0} + \mathbf{0}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m) \\ &= f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m) + f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m) \\ &\implies f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{0}, \mathbf{x}_{k+1}, \dots, \mathbf{x}_m) = 0. \quad \square \end{aligned}$$



令

$$f(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \mathbf{e}_{j_m}) = a_{j_1, j_2, \dots, j_m}, \quad (6)$$

其中  $j_1, j_2, \dots, j_m \in \{1, 2, \dots, n\}$ . 我们利用这  $n^m$  个实数来计算一个  $m$  重线性函数的表达式. 再设

$$\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^n x_{i,j} \mathbf{e}_j, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

则

$$\begin{aligned} & f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m) \\ &= f\left(\sum_{j_1=1}^n x_{1,j_1} \mathbf{e}_{j_1}, \sum_{j_2=1}^n x_{2,j_2} \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \sum_{j_m=1}^n x_{m,j_m} \mathbf{e}_{j_m}\right) \\ &= \sum_{j_1=1}^n x_{1,j_1} f\left(\mathbf{e}_{j_1}, \sum_{j_2=1}^n x_{2,j_2} \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \sum_{j_m=1}^n x_{m,j_m} \mathbf{e}_{j_m}\right) \\ &= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n x_{1,j_1} x_{2,j_2} f\left(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \sum_{j_m=1}^n x_{m,j_m} \mathbf{e}_{j_m}\right) \\ &\quad \vdots \\ &= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \cdots \sum_{j_m=1}^n x_{1,j_1} x_{2,j_2} \cdots x_{m,j_m} f(\mathbf{e}_{j_1}, \mathbf{e}_{j_2}, \dots, \mathbf{e}_{j_m}) \end{aligned}$$

故

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m) = \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \cdots \sum_{j_m=1}^n a_{j_1, j_2, \dots, j_m} x_{1,j_1} x_{2,j_2} \cdots x_{m,j_m}. \quad (7)$$

## 1.2 $\mathbb{R}^n$ 上的多重斜对称线性函数

定义 1.6 映射:

$$f: \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_m \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) \mapsto f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$$

称为  $m$  重斜对称的, 如果对任意  $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ,

$$f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_m)$$
$$= -f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_m).$$

例 1.3 中二阶行列式是 2 重斜对称的. 这是因为

$$\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} y_1 & x_1 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix}.$$

引理 1.7 设  $f$  是  $\mathbb{R}^n$  上的  $m$  重斜对称函数. 如果  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m$  中有两个向量相等, 则  $f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m) = 0$ .

证明. 不妨设  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 := \mathbf{u}$ . 因为

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_m) = -f(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_m),$$

所以

$$f(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_m) = -f(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_m)$$
$$\implies 2f(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_m) = 0.$$

因为  $2 \neq 0$ , 所以  $f(\mathbf{u}, \mathbf{u}, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_m) = 0$ .  $\square$