

第三章 行列式

设 f 是 $\mathbb{R}^n$ 上 n 重斜对称线性函数. 我们利用 $m = n$ 时上周讲义中公式 (6) 和 (7) 推导 f 的表达式. 由上周讲义中引理 1.5 可知, 如果下标 $j_1, \dots, j_n$ 中有两个相同, 则

$$a_{j_1, \dots, j_n} = 0.$$

若 $j_1, \dots, j_n$ 两两不同, 则这些下标对应一个置换

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_n \end{pmatrix}.$$

即 $(j_1, \dots, j_n) = (\sigma(1), \dots, \sigma(n))$. 再根据上周公式 (7), 我们有

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1), \sigma(2), \dots, \sigma(n)} x_{1, \sigma(1)} x_{2, \sigma(2)} \cdots x_{n, \sigma(n)}. \quad (1)$$

设 $w = f(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. 我们来研究 w 和 $a_{\sigma(1), \dots, \sigma(n)}$ 之间的关系. 根据上周讲义中公式 (6),

$$a_{\sigma(1), \dots, \sigma(n)} = f(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}).$$

下面我们证明:

断言. $a_{\sigma(1), \dots, \sigma(n)} = \epsilon_\sigma w$.

证明. 设 $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$, 其中 $\tau_1, \dots, \tau_k$ 是对换. 如果 $k = 1$, 则可设 $\sigma = (i, j)$. 于是,

$$\begin{aligned} a_{\sigma(1), \dots, \sigma(n)} &= f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_n) \\ &= -f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}, \dots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_j, \mathbf{x}_{j+1}, \dots, \mathbf{x}_n) \\ &= -w. \end{aligned}$$

断言在 $k = 1$ 时成立. 设 $k > 1$ 且断言对 $k-1$ 成立. 考虑 k 时. 令 $\pi = \tau_2 \cdots \tau_k$. 则 $\sigma = \tau_1 \pi$. 我们有

$$\begin{aligned} a_{\sigma(1), \dots, \sigma(n)} &= f(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}) \\ &= f(\mathbf{e}_{\tau_1 \pi(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\tau_1 \pi(n)}) \\ &= -f(\mathbf{e}_{\pi(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\pi(n)}) \\ &= -\epsilon_\pi f(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \quad (\text{归纳假设}) \\ &= \epsilon_\sigma w. \end{aligned}$$

断言成立.

由此断言和 (1) 可知

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) = w \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma x_{1,\sigma(1)} x_{2,\sigma(2)} \cdots x_{n,\sigma(n)}. \quad (2)$$

于是, 每个 $\mathbb{R}^n$ 上的 n 重斜线性函数都具有形式 (2) 且具有上述形式的函数必然 n 重斜线性, 其中 w 可取任意实数.

2 行列式的定义和基本性质

定义 2.1 行列式函数:

$$\det : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \mapsto \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma} x_{1, \sigma(1)} \cdots x_{n, \sigma(n)},$$

其中

$$\mathbf{x}_j = \begin{pmatrix} x_{j,1} \\ \vdots \\ x_{j,n} \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

由 (2) 可知, $\det$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的 n 重线性斜对称函数.

注解 2.2 根据 (1) 中 w 的定义, $\det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$.

定义 2.3 设 $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. 矩阵 A 的行列式是

$$\det(\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(n)}). \quad (\text{函数版})$$

令 $A = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$, 其中 $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ 由定义 2.1 给出. 则

$$a_{i,j} = x_{j,i}, \quad i, j \in \{1, \dots, n\}.$$

故

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n}. \quad (\text{系数版}) \quad (3)$$

矩阵 A 的行列式记为 $\det(A)$ 或 $|A|$.

事实上

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma} a_{1,\sigma(1),1} \cdots a_{n,\sigma(n)}$$

也成立. 验证如下:

$$\begin{aligned} \det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma} a_{\sigma(1),1} \cdots a_{\sigma(n),n} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma} a_{\sigma(1),\sigma^{-1}\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n),\sigma^{-1}\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma^{-1}} a_{\sigma(1),\sigma^{-1}\sigma(1)} \cdots a_{\sigma(n),\sigma^{-1}\sigma(n)} \quad (\sigma^{-1} \text{ 和 } \sigma \text{ 奇偶性相同}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma^{-1}} a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} \quad (\{1, \dots, n\} = \{\sigma(1), \dots, \sigma(n)\}) \\ &= \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \epsilon_{\sigma^{-1}} a_{1,\sigma^{-1}(1)} \cdots a_{n,\sigma^{-1}(n)} \quad \sigma^{-1} \text{ 遍历整个 } S_n \\ &= \sum_{\tau \in S_n} \epsilon_{\tau} a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n,\tau(n)}. \end{aligned}$$

验证完毕. 由此可知,

命题 2.4 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$. 则 $\det(A) = \det(A^t)$.

例 2.5 设 $A \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$ 斜对称. 证明: $\det(A) = 0$.

证明. 因为 $A^t = -A$, 所以 $\det(A) = \det(-A)$ (命题 2.4).

根据性质 (L2),

$$\det(-A) = (-1)^{2n+1} \det(A) = -\det(A).$$

于是, $\det(A) = -\det(A)$. 从而 $\det(A) = 0$.

例 2.6 根据注解 2.2,

$$\det(E_n) = \det(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1.$$

根据上周讲义中引理 1.5, 如果方阵 A 中有一列等于零, 则 $\det(A) = 0$.

由函数版的定义可知, $\det(A)$ 是关于 A 的列的 n 重线性斜函数. 由此得出下列基本性质.

(L1) 如果 $\vec{A}^{(j)} = \alpha \mathbf{v}$, 其中 $\alpha \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$.

$$\det(A) = \alpha \det \left(\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(j-1)}, \mathbf{v}, \vec{A}^{(j+1)}, \dots, \vec{A}^{(n)} \right).$$

(L2) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det(A)$.

(L3) 设 $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ 且 $\vec{A}^{(j)} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. 则

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det \left(\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(j-1)}, \mathbf{u}, \vec{A}^{(j+1)}, \dots, \vec{A}^{(n)} \right) \\ &\quad + \det \left(\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(j-1)}, \mathbf{v}, \vec{A}^{(j+1)}, \dots, \vec{A}^{(n)} \right). \end{aligned}$$

(L4) 设 $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ 且 $\vec{A}^{(j)} = \sum_{k=1}^m \alpha_k \mathbf{v}_k$, 其中 $\alpha_i \in \mathbb{R}$ 和 $\mathbf{v}_i \in \mathbb{R}^n$. 则

$$\det(A) = \sum_{k=1}^m \alpha_k \det \left(\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(j-1)}, \mathbf{v}_k, \vec{A}^{(j+1)}, \dots, \vec{A}^{(n)} \right).$$

在上述性质中 (L1) 和 (L3) 成立是因为多重线性函数关于一个变元是线性的. 性质 (L4) 是 (L1) 和 (L3) 的推论(用归纳法直接可得). 性质 (L2) 可以通过 n 次利用 (L1) 得出. 具体过程如下

$$\begin{aligned}
 \det(\alpha A) &= \det(\alpha \vec{A}^{(1)}, \alpha \vec{A}^{(2)}, \dots, \alpha \vec{A}^{(n)}) \\
 &= \alpha \det(\vec{A}^{(1)}, \alpha \vec{A}^{(2)}, \dots, \alpha \vec{A}^{(n)}) \quad (\text{对第一列用 (L1)}) \\
 &= \alpha^2 \det(\vec{A}^{(1)}, \vec{A}^{(2)}, \alpha \vec{A}^{(3)}, \dots, \alpha \vec{A}^{(n)}) \quad (\text{对第二列用 (L1)}) \\
 &\vdots \\
 &= \alpha^n \det(\vec{A}^{(1)}, \vec{A}^{(2)}, \dots, \vec{A}^{(n)}) \\
 &= \alpha^n \det(A).
 \end{aligned}$$

例 2.7 证明: $D_n = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ 的行列式等于 $\lambda_1 \cdots \lambda_n$.
证明. 我们计算

$$\begin{aligned}
 \det(D_n) &= \det(\lambda_1 \mathbf{e}_1, \lambda_2 \mathbf{e}_2, \dots, \lambda_n \mathbf{e}_n) \\
 &= \lambda_1 \det(\mathbf{e}_1, \lambda_2 \mathbf{e}_2, \dots, \lambda_n \mathbf{e}_n) \quad (\text{对第一列用 (L1)}) \\
 &= \lambda_1 \lambda_2 \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \lambda_3 \mathbf{e}_3, \dots, \lambda_n \mathbf{e}_n) \quad (\text{对第二列用 (L1)}) \\
 &\vdots \\
 &= \lambda_1 \cdots \lambda_n \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = \lambda_1 \cdots \lambda_n.
 \end{aligned}$$

利用行列式函数是斜对称的和性质 (L4), 我们得到:

(S1) 设交换方阵 A 中两不同列的位置得到方阵 B , 则
 $\det(B) = -\det(A)$.

(S2) 如果方阵 A 中有两列相同, 则 $\det(A) = 0$;

(S3) 如果 A 中某列是其它列的线性组合, 则 $\det(A) = 0$.

(S4) 把 A 中某一列的倍式加到另一列上得到矩阵 B , 则 $\det(B) = \det(A)$.

性质 (S1) 来自斜对称函数的定义. 性质 (S2) 是上周讲义引理 1.5 的直接推论. 性质 (S3) 推导过程如下: 不妨设

$$\vec{A}^{(n)} = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \vec{A}^{(j)}.$$

则

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(\vec{A}^{(1)}, \vec{A}^{(2)}, \dots, \vec{A}^{(n-1)}, \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \vec{A}^{(j)}) \\ &= \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \det(\vec{A}^{(1)}, \vec{A}^{(2)}, \dots, \vec{A}^{(n-1)}, \vec{A}^{(j)}) \quad (\text{对第 } n \text{ 列用 (L4)}) \\ &= 0. \quad (\text{对和式中每个行列式用 (S2)}) \end{aligned}$$

性质 (S4) 的推导过程与 (S3) 类似. 具体过程如下, 不妨设

$$B = (\vec{A}^{(1)} + \alpha \vec{A}^{(2)}, \vec{A}^{(2)}, \dots, \vec{A}^{(n)}),$$

其中 $\alpha \in \mathbb{R}$. 则

$$\begin{aligned}\det(B) &= \det(\vec{A}^{(1)} + \alpha \vec{A}^{(2)}, \vec{A}^{(2)}, \dots, \vec{A}^{(n)}) \\ &= \det(A) + \alpha \det(\vec{A}^{(2)}, \vec{A}^{(2)}, \dots, \vec{A}^{(n-1)}) \quad (\text{对第一列用 (L4)}) \\ &= \det(A). \quad (\text{对第二个行列式用 (S2)})\end{aligned}$$

例 2.8 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$. 证明: A 不满秩蕴含 $\det(A) = 0$.

证明. 因为 A 不满秩, 所以 A 的列向量线性相关. 故某个列向量是其它列的线性组合 (第二章第一讲命题 1.11 (iii)). 由性质 (S3) 可知, $\det(A) = 0$.

例 2.9 计算 n 阶初等矩阵的行列式.

解. 由性质 (S1) 可知, $\det(F_{i,j}^{(n)}) = -1$ 在 $i \neq j$ 时成立. 否则其行列式等于 1. 由性质 (S4) 可知, $\det(F_{i,j}^{(n)})(\alpha) = 1$. 由性质 (L1) 可知, $\det(F_i^{(n)}(\lambda)) = \lambda$.

下面我们来研究系数版的行列式定义.

例 2.10 设

$$A_n = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

则

$$\begin{aligned}\det(A_2) &= \epsilon_e a_{1,e(1)} a_{2,e(2)} + \epsilon_{(12)} a_{1,(12)(1)} a_{2,(12)(2)} \\ &= a_{1,1} a_{2,2} - a_{1,2} a_{2,1}.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\det(A_3) &= \epsilon_e a_{1,e(1)} a_{2,e(2)} a_{3,e(3)} + \epsilon_{(12)} a_{1,(12)(1)} a_{2,(12)(2)} a_{3,(12)(3)} \\ &\quad + \epsilon_{(13)} a_{1,(13)(1)} a_{2,(13)(2)} a_{3,(13)(3)} + \epsilon_{(23)} a_{1,(23)(1)} a_{2,(23)(2)} a_{3,(23)(3)} \\ &\quad + \epsilon_{(123)} a_{1,(123)(1)} a_{2,(123)(2)} a_{3,(123)(3)} \\ &\quad + \epsilon_{(213)} a_{1,(213)(1)} a_{2,(213)(2)} a_{3,(213)(3)} \\ &= a_{1,1} a_{2,2} a_{3,3} - a_{1,2} a_{2,1} a_{3,3} \\ &\quad - a_{1,3} a_{2,2} a_{3,1} - a_{1,1} a_{2,3} a_{3,2} \\ &\quad + a_{1,2} a_{2,3} a_{3,1} \\ &\quad + a_{1,3} a_{2,1} a_{3,2}.\end{aligned}$$

命题 2.11 设

$$T_u = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix}$$

和

$$T_\ell = \begin{pmatrix} \ell_{1,1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{2,1} & \ell_{2,2} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n,1} & \ell_{n,2} & \ell_{n,3} & \cdots & \ell_{n,n} \end{pmatrix}$$

则

$$\det(T_u) = u_{1,1}u_{2,2} \cdots u_{n,n} \quad \text{和} \quad \det(T_\ell) = \ell_{1,1}\ell_{2,2} \cdots \ell_{n,n}.$$

证明. 我们来证明上三角情形, 下三角情形类似.

设 $T_u = (u_{i,j})_{n \times n}$. 则当 $i < j$ 时, $u_{i,j} = 0$. 在 $\det(T_u)$ 的和式表示 (3) 中的一项是

$$a_\sigma = \epsilon_\sigma u_{1,\sigma(1)} \cdots u_{n,\sigma(n)},$$

其中 $\sigma \in S_n$. 如果存在某个 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 使得 $i > \sigma(i)$, 则 $a_\sigma = 0$. 于是, $a_\sigma \neq 0$ 蕴含 $i \leq \sigma(i)$ 对所有 $i = 1, 2, \dots, n$ 成立. 故 σ 必然是恒同映射. 我们得到

$$\det(T_u) = a_e = \epsilon_e u_{1,e(1)} \cdots u_{n,e(n)} = u_{1,1} \cdots u_{n,n}. \quad \square$$

计算行列式的一个基本方法是通过第一和第二类初等变换把给定的行列式对应的矩阵化为上三角或下三角形矩阵, 然后利用命题 2.11 计算给定行列式的值. 需要注意的是: 应用一次第一类初等变换行列式的值会变号(性质(S1)); 而应用一次第二类初等变换行列式的值不变(性质(S4)). 当利用第三类初等变换时, 行列式要乘以适当的实数.

例 2.12 计算矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

的行列式的值.

证明. 利用第二类初等行变换可得

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = -8.$$

利用第一类初等行变换可得

$$\det(B) = -\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -1.$$

例 2.13 展开 n 阶矩阵

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix}$$

的行列式.

解. 多次应用性质 (S_4) 可得

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a + (n-1)b & b & b & \cdots & b \\ a + (n-1)b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a + (n-1)b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

根据性质 $(L1)$ 得

$$\det(A) = (a + (n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 1 & a & b & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}.$$

再利用第二类初等行变换, 我们有

$$\det(A) = (a + (n-1)b) \begin{vmatrix} 1 & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = (a + (n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

定理 2.14 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$. 则 $\det(A) \neq 0$ 当且仅当 $\text{rank}(A) = n$.

证明. 根据例 2.8, 我们有 $\det(A) \neq 0 \implies \text{rank}(A) = n$. 反之, 设 $\text{rank}(A) = n$. 则通过第一和第二类初等行变换, 我

们可以把 A 变成阶梯型(上三角)矩阵

$$T_u = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \cdots & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & u_{2,3} & \cdots & u_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix}.$$

于是, $\det(A) = \pm \det(T_u)$. 根据第二章第二讲引理 3.2, $\text{rank}(T_u) = n$. 我们推出 T_u 对角线上的元素都非零. 根据命题 2.11, $\det(T_u) \neq 0$. 从而 $\det(A) \neq 0$. $\square$

推论 2.15 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$. 则 $\det(A) \neq 0$ 当且仅当 A 可逆.

证明. 由上述定理和第二章第五讲定理 7.14 直接可得. $\square$

例 2.16 证明实数上的奇数阶斜对称矩阵都不可逆.

证明. 由例 2.5 可知, 任何奇数阶斜对称矩阵的行列式都等于零. 根据上述推论, 奇数阶斜对称矩阵都不可逆.

3 行列式的进一步性质

3.1 行列式按一行(列)展开

定义 3.1 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. 去掉 A 中第 i 行和第 j 列得到的 $(n-1)$ 阶方阵的行列式称为 A 关于 i 行和 j 列的 $(n-1)$ 阶余子式(*co-minor*), 记为 $M_{i,j}$. 而 $A_{i,j} := (-1)^{i+j} M_{i,j}$ 称为 A 关于 i 行和 j 列的代数余子式.

例 3.2 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

则

$$M_{1,1} = \det \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad A_{2,3} = (-1)^{2+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = -M_{2,3}.$$

定理 3.3 设 $A = (a_{i,j}) \in M_n(\mathbb{R})$. 则对于任意的 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$$\det(A) = \underbrace{\sum_{k=1}^n a_{i,k} A_{i,k}}_{\text{按一行展开}} \quad \text{和} \quad \det(A) = \underbrace{\sum_{k=1}^n a_{k,j} A_{k,j}}_{\text{按一列展开}}.$$

证明. 断言 1. 设 A 中最后一行中前 $(n-1)$ 个元素都等于零. 则 $\det(A) = a_{n,n} A_{n,n}$.

断言 1 的证明. 由行列式的定义可知

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_{\sigma} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n-1,\sigma(n-1)} a_{n,\sigma(n)}.$$

因为当 $n \neq \sigma(n)$ 时, $a_{n,\sigma(n)} = 0$, 所以

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n, \sigma(n)=n} \epsilon_{\sigma} a_{1,\sigma(1)} \cdots a_{n-1,\sigma(n-1)} a_{n,n}.$$

故

$$\det(A) = a_{n,n} \sum_{\tau \in S_{n-1}} \epsilon_{\tau} a_{1,\tau(1)} \cdots a_{n-1,\tau(n-1)} = a_{n,n} M_{n,n} = a_{n,n} A_{n,n}.$$

断言 1 成立.

断言 2. 设 A 中第 i 行中只有第 j 个元素非零. 则 $\det(A) = a_{i,j} A_{i,j}$.

断言 2 的证明. 把 A 中第 i 行与 $\vec{A}_{i+1}, \dots, \vec{A}_n$ 逐个对调, 然后把所得矩阵的第 j 列与第 $(j+1)$ 列至第 n 列逐个对调, 我们得到矩阵

$$B = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} & a_{1,j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} & a_{i-1,j} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} & a_{i+1,j} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & \cdots & a_{n-1,j-1} & a_{n-1,j+1} & \cdots & a_{n-1,n} & a_{n-1,j} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{i,j} \end{pmatrix}.$$

由断言 1, $\det(B) = a_{i,j} M_{i,j}$. 由行列式性质 (S1),

$$\det(B) = (-1)^{n-i+n-j} \det(A) = (-1)^{i+j} \det(A) \implies \det(A) = a_{i,j} A_{i,j}.$$

断言 2 成立.

下面考虑一般情形. 由行列式的多重线性和断言 2 可

知

$$\det(A) = \sum_{j=1}^n \det \begin{pmatrix} \vec{A}_1 \\ \vdots \\ \vec{A}_{i-1} \\ 0 \cdots 0, a_{i,j}, 0, \cdots 0 \\ \vec{A}_{i+1} \\ \vdots \\ \vec{A}_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n a_{i,j} A_{i,j}.$$

我们证明了按行展开的公式. 按列展开的公式可以类似证明, 或通过行列式的转置公式和行展开公式证明. $\square$

例 3.4 展开行列式

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

解. 利用上述定理证明中的断言 2, 我们有

$$D = -2 \begin{vmatrix} 5 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = -10 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ -4 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix}.$$

再利用第二类初等行变换得

$$D = -10 \begin{vmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & 2 \\ 0 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 20 \times 6 \times (-7 - 2) = -1080.$$

例 3.5 *Vandermonde* 行列式. 设 $(\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$. 求次数为 $n-1$ 次实系数多项式

$$f(x) = a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

使得

$$f(\alpha_i) = \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

即

$$a_0 + a_1\alpha_i + \cdots + a_{n-2}\alpha_i^{n-2} + a_{n-1}\alpha_i^{n-1} = \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

其中 $a_0, a_1, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}$ 是 n 个未知数. 利用矩阵表示, 我们有

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-2} & \alpha_1^{n-1} \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-2} & \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-2} & \alpha_{n-1}^{n-1} \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-2} & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

记 $V_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \det(A)$. 称之为关于 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 的 *Vandermonde* 行列式. 该行列式也简记为 V_n .

展开 V_n 有多种方法. 我们这里采用初等变换和数学归纳法. 当 $n = 2$ 时,

$$V_2 = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 \\ 1 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_2 - \alpha_1.$$

$$\begin{aligned} V_3 &= \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ 1 & \alpha_2 & \alpha_2^2 \\ 1 & \alpha_3 & \alpha_3^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ 0 & \alpha_2 - \alpha_1 & \alpha_2^2 - \alpha_1^2 \\ 0 & \alpha_3 - \alpha_1 & \alpha_3^2 - \alpha_1^2 \end{vmatrix} \\ &= (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1) \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \\ 0 & 1 & \alpha_2 + \alpha_1 \\ 0 & 1 & \alpha_3 + \alpha_1 \end{vmatrix} = (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_2). \end{aligned}$$

猜测: $V_n = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)$. 设 $n > 3$ 且阶数小于 n 时

猜测成立. 当 n 时,

$$\begin{aligned}
V_n &= \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-2} & \alpha_1^{n-2}(\alpha_1 - \alpha_n) \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-2} & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-2} & \alpha_{n-1}^{n-2}(\alpha_{n-1} - \alpha_n) \\ 1 & \alpha_n & \cdots & \alpha_n^{n-2} & 0 \end{vmatrix} \quad (AF_{n-1,n}(-\alpha_n)) \\
&= \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \cdots & \alpha_1^{n-3}(\alpha_1 - \alpha_n) & \alpha_1^{n-2}(\alpha_1 - \alpha_n) \\ 1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_2^{n-3}(\alpha_2 - \alpha_n) & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_{n-1} & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-3}(\alpha_{n-1} - \alpha_n) & \alpha_{n-1}^{n-2}(\alpha_{n-1} - \alpha_n) \\ 1 & \alpha_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&\quad (AF_{n-1,n}(-\alpha_n)F_{n-2,n-1}(-\alpha_n)) \\
&= \cdots \\
&= \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 - \alpha_n & \cdots & \alpha_1^{n-3}(\alpha_1 - \alpha_n) & \alpha_1^{n-2}(\alpha_1 - \alpha_n) \\ 1 & \alpha_2 - \alpha_n & \cdots & \alpha_2^{n-3}(\alpha_2 - \alpha_n) & \alpha_2^{n-2}(\alpha_2 - \alpha_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_{n-1} - \alpha_n & \cdots & \alpha_{n-1}^{n-3}(\alpha_{n-1} - \alpha_n) & \alpha_{n-1}^{n-2}(\alpha_{n-1} - \alpha_n) \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} \\
&\quad (AF_{n-1,n}(-\alpha_n)F_{n-2,n-1}(-\alpha_n) \cdots F_{1,2}(-\alpha_n)) \\
&= (-1)^{n+1} \prod_{i=1}^{n-1} (\alpha_i - \alpha_n) V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \\
&= \prod_{i=1}^{n-1} (\alpha_n - \alpha_i) V(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \\
&= \prod_{i=1}^{n-1} (\alpha_n - \alpha_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (\alpha_j - \alpha_i) \\
&= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i).
\end{aligned}$$

猜测成立. 由此可知, A 满秩当且仅当 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 两两不同. 此时, 所求多项式存在且唯一.

例 3.6 计算

$$D_n = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

解. 直接计算得 $D_1 = 2$, $D_2 = 3$,

$$D_3 = \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 4.$$

猜测: $D_n = n + 1$.

设 $n > 3$ 且当阶数小于 n 时猜测成立. 按第一列展开

得

$$\begin{aligned}
 D_n &= 2D_{n-1} - \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= 2D_{n-1} - D_{n-2} = 2n - (n-1) = n+1.
 \end{aligned}$$

猜测成立.

3.2 分块矩阵的行列式

定理 3.7 设 $A \in M_m(\mathbb{R})$, $B \in M_n(\mathbb{R})$ 和 $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 则

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = \det(A) \det(B).$$

证明. (矩阵版) 对 m 归纳. 当 $m=1$ 时, 按第一列展开得

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} a & c_1, \dots, c_n \\ O & B \end{pmatrix} = a \det(B).$$

结论成立. 设 $m > 1$ 且 A 是 $m-1$ 阶方阵时结论成立. 设

$A = (a_{i,j})_{m \times m}$. 则

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} & & \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,m} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,m} & & \\ & & O & & & B \end{pmatrix} \\ &= a_{1,1}A_{1,1} \det(B) + a_{2,1}A_{2,1} \det(B) + \cdots + a_{m,1}A_{m,1} \det(B) \\ &\quad (\text{按第一列展开并利用归纳假设, 其中 } A_{i,j} \text{ 代表 } A \text{ 的代数余子式}) \\ &= (a_{1,1}A_{1,1} + a_{2,1}A_{2,1} + \cdots + a_{m,1}A_{m,1}) \det(B) \\ &= \det(A) \det(B). \quad \square \end{aligned}$$

(映射版) 把行列式

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}$$

看成关于 A 的列的 m 重线性斜对称函数. 即定义:

$$\begin{aligned} f : \underbrace{\mathbb{R}^m \times \cdots \times \mathbb{R}^m}_m &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(m)}) &\mapsto \det \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

由第三章第一讲等式 (4) 可知, $f(\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(m)}) = w \det(A)$, 其中 $w = f(\vec{E}_m^{(1)}, \dots, \vec{E}_m^{(m)})$. 由 f 的定义可知和按第一列展开 (m 次), 我们得到

$$w = f(\vec{E}_m^{(1)}, \dots, \vec{E}_m^{(m)}) = \det \begin{pmatrix} E_m & C \\ O & B \end{pmatrix} = \det(B).$$

故

$$f(\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(m)}) = \det(A) \det(B) = \det \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}. \quad \square$$

例 3.8 计算

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{vmatrix}.$$

解.

$$D = - \begin{vmatrix} 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 9 & 10 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -36.$$

推论 3.9 设 $A \in M_m(\mathbb{R})$, $B \in M_n(\mathbb{R})$ 和 $C \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 则

$$\det \begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix} = (-1)^{mn} \det(A) \det(B).$$

证明. 把子矩阵

$$\begin{pmatrix} A \\ O \end{pmatrix}$$

中的第一列逐个与前 n 列对调, 然后把第二列与它前面的 n 列逐个对调, 经过 mn 次列对调后, 我们得到矩阵

$$\begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix}.$$

于是

$$\det \begin{pmatrix} C & A \\ B & O \end{pmatrix} = (-1)^{mn} \det \begin{pmatrix} A & C \\ O & B \end{pmatrix} = (-1)^{mn} \det(A) \det(B),$$

其中最后一个等式来自定理 3.7. $\square$

3.3 乘法定理

定理 3.10 设 $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. 则

$$\det(AB) = \det(A) \det(B).$$

证明. (矩阵法) 如果 A 或 B 不满秩, 则 AB 也不满秩 (第二章第四讲定理 6.25 (i)). 故 $\det(AB) = 0$ (第三章第一讲定理 2.14). 同理 $\det(A) \det(B) = 0$. 故定理成立.

断言. 设 $C, M \in M_n(\mathbb{R})$ 且 C 是初等矩阵. 则

$$\det(CM) = \det(C) \det(M) = \det(MC).$$

断言的证明. 设 $C = F_{i,j}$. 如果 $i = j$, 则 $C = E$. 断言显然成立. 如果 $i \neq j$. 则 $\det(CM) = \det(MC) = -\det(M)$. 而 $\det(C) \det(M) = -\det(M)$. 断言也成立.

设 $C = F_{i,j}(\alpha)$, $i \neq j$. 则 $\det(CM)$, $\det(MC)$ 和 $\det(C)\det(M)$ 都等于 $\det(M)$. 故断言成立.

设 $C = F_i(\lambda)$. 则 $\det(CM)$, $\det(MC)$ 和 $\det(C)\det(M)$ 都等于 $\lambda \det(M)$. 断言成立.

设矩阵 A 满秩. 则存在初等矩阵 $C_1, C_2, \dots, C_p$ 使得

$$A = C_1 C_2 \cdots C_p$$

(第二章第五讲定理 7.14 和第六讲推论 8.6). 由断言可知,
 $\det(A) = \det(C_1) \det(C_2 \cdots C_p) = \det(C_1) \det(C_2) \cdots \det(C_p)$.
(4)

类似地

$$\begin{aligned} \det(AB) &= \det(C_1(C_2 \cdots C_p B)) \\ &= \det(C_1) \det(C_2 \cdots C_p B) \quad (\text{断言}) \\ &= \det(C_1) \det(C_2) \cdots \det(C_p) \det(B) \\ &= \det(A) \det(B) \quad ((4)). \end{aligned}$$

定理成立.

(映射法) 定义:

$$\begin{aligned} f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(n)}) &\mapsto \det(A\vec{B}^{(1)}, \dots, A\vec{B}^{(n)}) = \det(AB) \end{aligned}.$$

由行列式的多重线性和矩阵乘法的分配律可直接验证 f 是多重线性的. 再根据行列式的斜对称性可知 f 也是斜对

称的. 由第三章第一讲等式 (4) 可知,

$$f(\vec{B}^{(1)}, \dots, \vec{B}^{(n)}) = w \det(B),$$

其中 $w = f(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$. 故

$$w = \det(AE_n) = \det(A).$$

于是, $\det(AB) = \det(A) \det(B)$. $\square$

注解 3.11 由上述定理可知,

$$\det(BA) = \det(B) \det(A) = \det(AB).$$

故 $\det(AB) = \det(BA)$. 即行列式是关于方阵乘法的交换不变量.

例 3.12 展开

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos(\theta_1) & \cos(2\theta_1) \\ 1 & \cos(\theta_2) & \cos(2\theta_2) \\ 1 & \cos(\theta_3) & \cos(2\theta_3) \end{vmatrix}.$$

解. 由行列式乘积定理, 我们有

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \cos(\theta_1) & 2\cos(\theta_1)^2 - 1 \\ 1 & \cos(\theta_2) & 2\cos(\theta_2)^2 - 1 \\ 1 & \cos(\theta_3) & 2\cos(\theta_3)^2 - 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \cos(\theta_1) & \cos(\theta_1)^2 \\ 1 & \cos(\theta_2) & \cos(\theta_2)^2 \\ 1 & \cos(\theta_3) & \cos(\theta_3)^2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

故 $D = 2(\cos(\theta_3) - \cos(\theta_1))(\cos(\theta_3) - \cos(\theta_2))(\cos(\theta_2) - \cos(\theta_1))$.

例 3.13 设 $A = ((\alpha_i + \beta_j)^{n-1})_{n \times n}$. 展开 $\det(A)$.

解. 注意到

$$\begin{aligned} (\alpha_i + \beta_j)^{n-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \alpha_i^k \beta_j^{n-1-k} \\ &= \left(\binom{n-1}{0} \alpha_i^0, \binom{n-1}{1} \alpha_i, \dots, \binom{n-1}{n-1} \alpha_i^{n-1} \right) \begin{pmatrix} \beta_j^{n-1} \\ \beta_j^{n-2} \\ \vdots \\ \beta_j^0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

故

$$A = \begin{pmatrix} \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} \alpha_1 & \cdots & \binom{n-1}{n-1} \alpha_1^{n-1} \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} \alpha_2 & \cdots & \binom{n-1}{n-1} \alpha_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \binom{n-1}{0} & \binom{n-1}{1} \alpha_n & \cdots & \binom{n-1}{n-1} \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1^{n-1} & \beta_2^{n-1} & \cdots & \beta_n^{n-1} \\ \beta_1^{n-2} & \beta_2^{n-2} & \cdots & \beta_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

由行列式的基本性质和乘积定理可知,

$$\det(A) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_j - \alpha_i)(\beta_j - \beta_i).$$

例 3.14 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 和 $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$. 则我们有 *Sylvester* 行列式恒等式:

$$\det(E_m + AB) = \det(E_n + BA).$$

证明. 由第二章例 10.11 可知, 存在矩阵 $C_1, C_2, C_3, C_4 \in M_{m+n}(\mathbb{R})$ 使得

$$C_3 C_1 \begin{pmatrix} E_m + AB & O \\ O & E_n \end{pmatrix} C_2 C_4 = \begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_n + BA \end{pmatrix}.$$

由关于分块行列式的定理可知,

$$\det(C_1) = \det(C_2) = \det(C_3) = \det(C_4) = 1.$$

再根据行列式乘积定理,

$$\det \begin{pmatrix} E_m + AB & O \\ O & E_n \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} E_n & O \\ O & E_n + BA \end{pmatrix}.$$

故 $\det(E_m + AB) = \det(E_n + BA)$. $\square$