第五章　复数域和多项式

6.3　重数

定义 6.19 *设 D 是唯一因子分解整环, $a \in D^*$ 和 $p \in D^*$ 是不可约元. 如果非负整数 m 使得 $p^m | a$ 但 $p^{m+1} \nmid a$, 则称 m 是 p 在 a 中的重数(multiplicity), 记为* $\mathrm{mult}_p(a)$.

因为 D 是唯一因子分解整环, 所以定义中的非负整数 m 一定存在. 换言之, $\mathrm{mult}_p(a)$ 是良定义的.

引理 6.20 *设 $p, a, b \in D^*$, 其中 p 是素元. 设 $k \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $p^k | ab$ 且 $p \nmid b$. 则 $p^k | a$.*

证明. 对 k 归纳. 由素元的定义, $k = 1$ 时结论成立. 设 $k > 1$ 且结论对 $k-1$ 成立. 因为 $p | ab$ 且 $p \nmid b$, 所以 $p | a$. 故存在 $c \in D^*$ 使得 $a = cp$. 于是, 存在 $d \in D^*$ 使得 $p^k d = cpb$. 根据整环中的消去律, $p^{k-1} d = cb$. 由归纳假设, $p^{k-1} | c$. 由此可知, $p^k | a$. □

引理 6.21 *设 D 是唯一因子分解整环, $a \in D^*$, $p_1, \ldots, p_k \in D^*$ 是两两互不相伴的不可约元. 设 $p_1, \ldots, p_k$ 在 a 中的重数分别是 $m_1, \ldots, m_k$. 则 $p_1^{m_1} \cdots p_k^{m_k} | a$.*

证明. 我们对 k 归纳. 如果 $k = 1$, 则结论即重数的定义. 设 $k > 1$ 且结论对于 $k-1$ 成立. 于是, 存在 $b \in D^*$ 使得

$$a = \left(p_1^{m_1} \cdots p_{k-1}^{m_{k-1}}\right) b.$$

由素元的定义可知, $p_k \nmid \left(p_1^{m_1}\cdots p_{k-1}^{m_{k-1}}\right)$. 由引理 6.20 可知, $p_k^{m_k}|b$. 由此可知

$$p_1^{m_1}\cdots p_k^{m_k}|a. \quad \Box$$

定理 6.22 *在唯一因子分解整环中, 每个非零非可逆元 a 可表示为*

$$a = up_1^{m_1}\cdots p_k^{m_k},$$

其中 $u \in U_D$, $p_1,\ldots,p_k$ 是两两互不相伴的不可约元, $m_i = \mathrm{mult}_{p_i}(a) > 0$, $i = 1,\ldots,k$. (称之为 a 的标准不可约分解).

定义 6.23 *设 $f \in F[x]^*$ 和 $x-\alpha \in F[x]$. 设 $x-\alpha$ 在 f 中的重数 m 为正. 则称为 α 是 f 中的 m 重根. 当 $m=1$ 时, α 称为 f 的单根(simple root); 当 $m>1$ 时, α 称为 f 的重根(multiple root).*

定理 6.24 *设 $f \in F[x]\setminus F$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_s \in F$ 是 f 互不相同的根, 其重数分别是 $m_1,\ldots,m_s$. 则*

$$(x-\alpha_1)^{m_1}\cdots(x-\alpha_s)^{m_s}|f.$$

特别地, $m_1+\cdots+m_s \le \deg(f)$.

证明. 注意到 $F[x]$ 是唯一因子分解整环 且 $x-\alpha_1,\ldots,x-\alpha_s$ 是 $F[x]$ 中两两互不相伴的不可约因子. 故结论由引理 6.21 直接可得. $\Box$

6.4 最大公因子和最小公倍式

命题 6.25 设 D 是唯一因子分解整环, $a, b \in D^*$. 则它们的最大公因子和最小公倍式都存在.

证明. 因为 D 是唯一因子分解整环, 所以存在 $u, v \in U_D$, 互不相伴的不可约元 $p_1, \ldots, p_m$, 非负整数 i_1, …, i_m, j_1, …, j_m 使得

$$a = up_1^{i_1} \cdots p_m^{i_m} \quad \text{和} \quad b = vp_1^{j_1} \cdots p_m^{j_m}.$$

令

$$g = p_1^{\min(i_1, j_1)} \cdots p_m^{\min(i_m, j_m)} \quad \text{和} \quad \ell = p_1^{\max(j_1, i_1)} \cdots p_m^{\max(i_m, j_m)}.$$

根据引理 6.21, g 是 a, b 的公因子.

设 d 是 a 和 b 的公因子且 q 是 d 的一个 k 重不可约因子, 其中 $k \geq 1$. 因为 D 是唯一因子分解整环, 所以存在 $s \in \{1, 2, \ldots, m\}$ 使得 $q \approx p_s$. 则 $k \leq \min(i_s, j_s)$. 故 $q^k | g$. 由引理 6.21, $d | g$. 故 g 是最大公因子.

类似地, 设 h 是 a 和 b 的公倍式. 因为 $a | h$, 所以对任意 $s \in \{1, \ldots, m\}$, $p_s^{i_s} | h$. 同理 $p_s^{j_s} | h$. 于是, $p_s^{\max(i_s, j_s)} | h$. 由引理 6.21, $\ell | h$. 即 ℓ 是最小公倍式. □

例 6.26 设 D^* 中任何两个元素都有最大公因子。则对任意 $a, b, c \in D^*$, $\gcd(ca, cb) = c \gcd(a, b)$.

证明. 设 $g = \gcd(a, b)$. 则存在 $u, v \in D^*$ 使得 $a = ug$ 和 $b = vg$, 且 $\gcd(u, v) = 1$. 我们有 $ca = u(cg)$ 和 $cb = v(cg)$. 故 cg 是 ca 和 cb 的公因子.

另一方面, 设 $h = \gcd(ca, cb)$. 则 $cg \mid h$. 故存在 $x \in D^*$ 使得 $h = xcg$. 由此可知，存在 $y, z \in D^*$ 使得

$$ca = yxcg \text{ 和 } cb = zxcg \Longrightarrow u = yx \text{ 和 } v = zx.$$

因为 $\gcd(u, v) = 1$, 所以 $x \mid 1$. 故 x 可逆。于是, $h \approx cg$. 换言之, $cg = \gcd(ca, cb)$. $\square$

6.5 多项式根的重数

设 $f \in F[x] \setminus F$ 和 $\alpha \in F$. 我们把 $\mathrm{mult}_{x-\alpha}(f)$ 称为 α 在 f 中的重数. 设 m_α 是 α 在 f 中的重数

(i) 如果 $m_\alpha = 1$, 则称 α 是 f 的单根.

(ii) 如果 $m_\alpha > 1$, 则称 α 是 f 的重根.

元素 α 不是 f 的根当且仅当它在 f 中的重数等于零 (见上学期第五章命题 1.20 (i)). 下面的结论是上学期第五章命题 1.20 (ii) 的推广.

命题 6.27 设 $f \in F[x] \setminus F$ 且 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F$ 是 f 的两两互不相同的根. 如果 m_i 是 α_i 的重数, $i = 1, \ldots, k$, 则

$$(x - \alpha_1)^{m_1} \cdots (x - \alpha_k)^{m_k} \mid f.$$

特别地, $m_1+\cdots+m_k\le\deg(f)$.

证明. 因为 $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ 两两互不相同, 所以

$$x-\alpha_1,\ldots,x-\alpha_k$$

两两互不相伴. 因为 $(x-\alpha_i)^{m_i}\mid f$, $i=1,\ldots,k$, 所以

$$(x-\alpha_1)^{m_1}\cdots(x-\alpha_k)^{m_k}\mid f$$

(引理 6.21). □

6.6 Gauss 引理

在本节中，为简介起见，我们令 $D=\mathbb{Z}$. 当 D 是唯一因子分解整环时结论都成立且证明类似.

定义 6.28 设

$$f=f_nx^n+f_{n-1}x^{n-1}+\cdots+f_0,\quad f_i\in\mathbb{Z},f_n\neq 0.$$

则正的最大公因子

$$\gcd(f_n,f_{n-1},\ldots,f_0)$$

称为 f 的容度*(content)*, 记为 $\operatorname{cont}(f)$. 设 $f=\operatorname{cont}(f)g$, 其中 $g\in\mathbb{Z}[x]^*$ 满足 $\operatorname{cont}(g)=1$. 称 g 是 f 的本原部分*(primitive part)*, 记为 $\operatorname{pp}(f)$.

设 $h\in\mathbb{Z}[x]^*$. 如果 $\operatorname{cont}(h)=1$, 则称 h 是本原多项式.

注解 6.29 规定 $\mathrm{cont}(f) > 0$ 导致下列结论: 如果 $f = ch$, 其中 $c \in \mathbb{Z}$ 和 $h \in \mathbb{Z}[x]$ 是本原的. 则

$$c > 0 \Longrightarrow \mathrm{cont}(f) = c \quad \text{且} \quad \mathrm{pp}(f) = h,$$

$$c < 0 \Longrightarrow \mathrm{cont}(f) = -c \quad \text{且} \quad \mathrm{pp}(f) = -h.$$

这是因为例 *6.26* 蕴含 $\mathrm{cont}(f) = |c|$.

引理 6.30 *(Gauss)* 设 $f, g \in \mathbb{Z}[x]^*$ 都是本原多项式. 则 fg 也是本原多项式.

证明. 设

$$f = f_m x^m + f_{m-1} x^{m-1} + \cdots + f_0$$

和

$$g = g_n x^n + g_{n-1} x^{n-1} + \cdots + g_0,$$

其中 $f_m, f_{m-1}, \ldots, f_0, g_n, g_{n-1}, \ldots, g_0 \in \mathbb{Z}$ 且 f_m, g_n 都非零. 假设 fg 不是本原的. 则存在素数 p 使得 $p|\mathrm{cont}(fg)$. 因为 $\mathrm{cont}(f) = 1$, 所以存在 $i \in \{0, 1, \ldots, m\}$ 使得

$$p|f_m, p|f_{m-1}, \ldots, p|f_{i+1}, \text{但}\, p \nmid f_i.$$

同理存在 $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ 使得

$$p|g_n, p|g_{n-1}, \ldots, p|g_{j+1}, \text{但}\, p \nmid g_j.$$

注意到在 fg 在中 x^{i+j} 的系数是

$$c = \sum_{k+\ell=i+j} f_k g_\ell \quad 且 \quad p|c.$$

如果 $\ell<j$, 则 $k>i$. 故 $p|f_k \Longrightarrow p|f_k g_\ell$. 如果 $\ell>j$, 则 $p|g_\ell$. 故 $p|f_k g_\ell$. 于是, $p|f_i g_j$. 故 $p|f_i$ 或 $p|g_j$. 矛盾. □

定理 6.31 设 $f \in \mathbb{Z}[x]$ 且 $\deg(f) > 0$. 如果 f 不能写成两个 $\mathbb{Z}[x]$ 中正次数的多项式之积. 则 f 在 $\mathbb{Q}[x]$ 不可约.

证明. 假设 $f = gh$, 其中 $g, h \in \mathbb{Q}[x] \setminus \mathbb{Q}$. 则存在 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\alpha f = \beta \tilde{g} \tilde{h},$$

其中 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}^*$, $\tilde{g}, \tilde{h} \in \mathbb{Z}[x]$ 是本原多项式, $\deg \tilde{g} = \deg(g)$, $\deg(\tilde{h}) = \deg(h)$. 根据注释 6.29, $\alpha \mathrm{cont}(f)\mathrm{pp}(f) = \beta(\tilde{g}\tilde{h})$. 我们得到 $\mathrm{pp}(f) = u\tilde{g}\tilde{h}$, 其中 $u \in \{1, -1\}$. 故

$$f = \mathrm{cont}(f)\mathrm{pp}(f) = (\mathrm{cont}(f)u\tilde{g})\tilde{h}.$$

矛盾. □

定理 6.32 *(Eisenstein 不可约性判别法)* 设

$$f = f_n x^n + f_{n-1} x^{n-1} + \cdots + f_0,$$

其中 $n > 0$, $f_n, f_{n-1}, \ldots, f_0 \in \mathbb{Z}$ 且 $f_n \neq 0$. 设 p 是素数. 如果

$$p \nmid f_n,\ p|f_{n-1},\ \ldots,\ p|f_0,\ p^2 \nmid f_0,$$

则 f 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约.

证明. 由上述定理可知, 我们只要证明 f 不能写成 $\mathbb{Z}[x]$ 中两个正次数的多项式之积即可. 假设

$$f(x) = (g_k x^k + \cdots + g_1 x + g_0)(h_\ell x^\ell + \cdots + h_1 x + h_0),$$

其中 $k, \ell \in \mathbb{Z}^+$, $g_k, \ldots, g_1, g_0, h_\ell, \ldots, h_1, h_0 \in D$ 且 g_k, h_ℓ 都不等于零.

因为 $f_n = g_k h_\ell$ 且 $p \nmid g_k h_\ell$, 所以 $p \nmid g_k$ 和 $p \nmid h_\ell$. 因为 $f_0 = g_0 h_0$ 和 $p | f_0$, 所以 $p | g_0$ 或 $p | h_0$. 不妨设 $p | g_0$. 又因为 $p^2 \nmid f_0$, 所以 $p \nmid h_0$. 因为 $p \nmid g_k$ 和 $p | g_0$, 所以存在 $i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ 使得

$$p | g_0, \cdots, p | g_{i-1} \quad \text{但} \quad p \nmid g_i.$$

则

$$f_i = h_0 g_i + h_1 g_{i-1} + \cdots + h_i g_0.$$

因为 $i \leq k < n$, 所以 $p | f_i$. 由此可知, $p | h_0 g_i$. 故 $p | h_0$ 或 $p | g_i$. 矛盾. □

例 6.33 证明: 对于 $n > 1$, $x^n - 2x + 2$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约.

证明. 注意到 $2 \nmid 1$, $2 | -2$, $2 | 2$ 但 $2^2 \nmid 2$. 根据定理 *6.32*, 该多项式不可约.

例 6.34 设 p 是素数. 证明: $x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约.

证明. 设 $f(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$. 考虑映射

$$\begin{aligned}\phi:\ \mathbb{Z}[x] &\longrightarrow \quad \mathbb{Z}[x]\\ g(x) &\mapsto \quad g(x+1).\end{aligned}$$

则 ϕ 是由 $\mathbb{Z}\hookrightarrow\mathbb{Z}[x]$ 和 $x\mapsto x+1$ 诱导的环同态. 同理

$$\begin{aligned}\psi:\ \mathbb{Z}[x] &\longrightarrow \quad \mathbb{Z}[x]\\ g(x) &\mapsto \quad g(x-1)\end{aligned}$$

也是环同态. 因为 $\phi\circ\psi=\psi\circ\phi=\mathrm{id}_{\mathbb{Z}[x]}$, 所以 ϕ 是环同构.

要证明 $f(x)$ 在 $\mathbb{Q}[x]$ 中不可约. 只要证明 $f(x+1)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中不可约 *(定理 6.31)*. 由于 ϕ 是同构, 只要证明 $f(x+1)$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中不可约即可. 注意到

$$f(x)=\frac{x^p-1}{x-1}\Longrightarrow f(x+1)=\frac{(x+1)^p-1}{x}.$$

故

$$f(x+1)=x^{p-1}+\binom{p}{1}x^{p-2}+\cdots+\binom{p}{2}x+p.$$

由第二章第一讲例 *7.17* 和定理 *6.32* 可知, $f(x+1)$ 不可约. 故 $f(x)$ 也不可约.

7 复数

7.1 复数域

设

$$\mathbb{C}:=\{x+y\sqrt{-1}\,|\,x,y\in\mathbb{R}\}.$$

设 $z=x+y\sqrt{-1}$, 其中 $x,y\in\mathbb{R}$. 则 x 称为 z 的实部, 记为 $\mathrm{Re}(z)$; y 称为 z 的虚部, 记为 $\mathrm{Im}(z)$. 注意到 $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$.

定义

$$\begin{aligned} +:\ \mathbb{C}\times\mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}\\ (x_1+y_1\sqrt{-1},x_2+y_2\sqrt{-1}) &\mapsto (x_1+x_2)+(y_1+y_2)\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

可直接验证 $(\mathbb{C},+,0)$ 是交换群. 定义

$$\begin{aligned} \cdot:\ \mathbb{C}\times\mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C}\\ (x_1+y_1\sqrt{-1},x_2+y_2\sqrt{-1}) &\mapsto (x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+y_1x_2)\sqrt{-1}. \end{aligned}$$

可直接验证 $(\mathbb{C},\cdot,1)$ 是交换含幺半群.

可直接验证分配律成立. 于是, $(\mathbb{C},+,0,\cdot,1)$ 是交换环.

设 $z=x+y\sqrt{-1}$, 其中 $x,y\in\mathbb{R}$. 则 $\bar{z}=x-y\sqrt{-1}$ 称为 z 的共轭. 注意到

$$z\bar{z}=x^2+y^2\in\mathbb{R}.$$

当 $z\neq 0$ 时,

$$z\frac{\bar{z}}{x^2+y^2}=1.$$

故 $(\mathbb{C},+,0,\cdot,1)$ 是域, 称之为复数域. 它的元素称为复数.

例 7.1 设

$$F=\left\{\begin{pmatrix} x & y\\ -y & x\end{pmatrix}\ \middle|\ x,y\in\mathbb{R}\right\}.$$

则 F 是 $\mathrm{M}_2(\mathbb{R})$ 的交换子环, $(F,+,O,\cdot,E)$ 是域. 下面我们验证 F 和 $\mathbb{C}$ 是同构的.

定义

$$\begin{aligned}\phi:\quad F \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{C}\\ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} &\mapsto \quad x+y\sqrt{-1}.\end{aligned}$$

可直接验证对任意 $A,B\in F$, $\phi(A+B)=\phi(A)+\phi(B)$. 设

$$A=\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad B=\begin{pmatrix} u & v \\ -v & u \end{pmatrix}.$$

则

$$\begin{aligned}\phi(AB)&=\phi(\begin{pmatrix} xu-yv & xv+yu \\ -xv-yu & xu-yv \end{pmatrix})\\ &=(xu-yv)+(xv+yu)\sqrt{-1}\\ &=(x+y\sqrt{-1})(u+v\sqrt{-1})\\ &=\phi(A)\phi(B).\end{aligned}$$

进而, $\phi(E)=1$. 故 ϕ 是环同态. 显然 ϕ 是满射. 再根据命题第四章第三讲命题 *4.4*, ϕ 是同构.

注意到

$$\phi(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix})=\sqrt{-1}.$$

因为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^2 = -E,$$

所以 $\sqrt{-1}^2 = -1$ 是合理的.

记 $\sqrt{-1}$ 为 $\mathbf{i}$, 称为虚单位.

命题 7.2 共轭映射 $z \mapsto \bar{z}$ 是从 $\mathbb{C}$ 到 $\mathbb{C}$ 的同构且 $\bar{\ }|_{\mathbb{R}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

证明. 设 $z = x + y\mathbf{i}$, $x, y \in \mathbb{R}$. 则 $\bar{z} = x - y\mathbf{i}$. 于是, 当 $y = 0$ 时, $\bar{z} = z$. 故 $\bar{\ }|_{\mathbb{R}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. 进而,

$$\bar{\bar{z}} = \overline{x - y\mathbf{i}} = x + y\mathbf{i} = z.$$

故共轭映射的逆是它自身, 从而是双射. 下面只需证明共轭映射是同态. 再设 $z' = x' + y'\mathbf{i}$, 其中 $x', y' \in \mathbb{R}$. 则

$$\begin{aligned} \overline{z + z'} &= \overline{(x + x') + (y + y')\mathbf{i}} = (x + x') - (y + y')\mathbf{i} \\ &= (x - y\mathbf{i}) + (x' - y'\mathbf{i}) = \bar{z} + \bar{z}'. \quad \square \end{aligned}$$

7.2 复数的极表示

设 $z = x + y\mathbf{i}$, 其中 $x, y \in \mathbb{R}$ 不全为零. 则

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\mathbf{i}\right).$$

则存在唯一的 $\theta \in [0, 2\pi)$ 使得,

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \text{和} \quad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

称 $\sqrt{x^2+y^2}$ 为 z 的模长, 记为 $|z|$. 称 θ 为 z 的幅角, 记为 $\arg z$. 再设 0 的模长为零, 幅角任意. 则对任意 $z \in \mathbb{C}$,

$$z = |z|(\cos(\theta) + \sin(\theta)\mathbf{i}).$$

称之为 z 的极化公式.

引理 7.3 设复数

$$z_1 = |z_1|(\cos(\theta_1) + \sin(\theta_1)\mathbf{i}),\ \ z_2 = |z_2|(\cos(\theta_2) + \sin(\theta_2)\mathbf{i}).$$

则

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2) + \sin(\theta_1+\theta_2)\mathbf{i}).$$

证明. 直接计算得

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= |z_1||z_2| \\ &\quad (\cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2)) + (\cos(\theta_1)\sin(\theta_2) + \sin(\theta_1)\cos(\theta_2))\mathbf{i} \\ &= |z_1||z_2|(\cos(\theta_1+\theta_2) + \sin(\theta_1+\theta_2)\mathbf{i}). \quad \square \end{aligned}$$

命题 7.4 设 $z = |z|(\cos(\theta) + \sin(\theta)\mathbf{i})$.

(i) 对任意 $n \in \mathbb{N}$, $z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + \sin(n\theta)\mathbf{i})$.

(ii) 如果 $z \neq 0$, 则 $z^{-1} = |z|^{-1}(\cos(\theta) - \sin(\theta)\mathbf{i})$.

证明. (i) 对 n 归纳. 当 $n=0$ 时, 结论显然成立. 设 $n>0$ 且结论对 $n-1$ 时成立.

$$
\begin{aligned}
z^n &= zz^{n-1} \\
&= |z|(\cos(\theta)+\sin(\theta)\mathbf{i})|z|^{n-1}(\cos((n-1)\theta)+\sin((n-1)\theta)\mathbf{i}) \\
&\quad \text{(归纳假设)} \\
&= |z|^n(\cos(n\theta)+\sin(n\theta)\mathbf{i}) \quad \text{(引理 7.3)}.
\end{aligned}
$$

(ii) 直接计算得

$$
\begin{aligned}
& z|z|^{-1}(\cos(\theta)-\sin(\theta)\mathbf{i}) \\
&= |z|(\cos(\theta)+\sin(\theta)\mathbf{i})|z|^{-1}(\cos(-\theta)+\sin(-\theta)\mathbf{i}) \\
&= 1 \quad \text{(引理 7.3)}. \quad \square
\end{aligned}
$$

令

$$e^{\mathbf{i}\theta}=\cos(\theta)+\sin(\theta)\mathbf{i}.$$

则, $z=|z|(\cos(\theta)+\sin(\theta)\mathbf{i})$ 可简记为 $z=|z|e^{\mathbf{i}\theta}$. 上述引理和命题中的结论可写为

$$z_1=|z_1|e^{\mathbf{i}\theta_1}, z_2=|z_2|e^{\mathbf{i}\theta_2} \implies z_1z_2=|z_1||z_2|e^{\mathbf{i}(\theta_1+\theta_2)}.$$

当 $z=|z|e^{\mathbf{i}\theta}\neq 0$ 时, 对任意 $n\in\mathbb{Z}$, $z^n=|z|^n e^{\mathbf{i}n\theta}$, 和 $\bar{z}=|z|e^{-\mathbf{i}\theta}$.

Euler “公式”

$$e^{\mathbf{i}\pi}+1=0.$$