第一章　空间与形式

4.4　若干维数公式

引理 4.11 设 U 是 V 的子空间. 则

$$\dim(V/U) = \dim(V) - \dim(U). \tag{1}$$

证明. 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ 是 U 的一组基. 由基扩充定理可知，存在 $\mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ 使得 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 V 的一组基. 下面我们来证明 $\mathbf{v}_{k+1} + U, \ldots, \mathbf{v}_n + U$ 是 V/U 的一组基. 首先, 设 $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n \in F$ 使得

$$\alpha_{k+1}(\mathbf{v}_{k+1} + U) + \cdots + \alpha_n(\mathbf{v}_n + U) = U.$$

则 $(\alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots \alpha_n\mathbf{v}_n) + U = U$. 即 $(\alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots \alpha_n\mathbf{v}_n) \in U$. 换言之, 存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in F$ 使得

$$\begin{aligned}
&\alpha_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + \alpha_n\mathbf{v}_n \\
&= \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k \\
&\Longrightarrow \alpha_1\mathbf{v}_1 + \cdots + \alpha_k\mathbf{v}_k + (-\alpha_{k+1})\mathbf{v}_{k+1} + \cdots + (-\alpha_n)\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

因为 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ 线性无关, 所以

$$\alpha_{k+1} = \cdots = \alpha_n = 0.$$

于是, $\mathbf{v}_{k+1}+U,\ldots,\mathbf{v}_n+U$ 线性无关. 再设 $\mathbf{v}+U\in V/U$, 其中 $\mathbf{v}\in V$. 则存在 $\beta_1,\ldots,\beta_n\in V$ 使得

$$\mathbf{v}=\underbrace{\beta_1\mathbf{v}_1+\cdots+\beta_k\mathbf{v}_k}_{\mathbf{x}}+\underbrace{\beta_{k+1}\mathbf{v}_{k+1}+\cdots+\beta_n\mathbf{v}_n}_{\mathbf{y}}.$$

于是

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}+U&=\mathbf{x}+\mathbf{y}+U\\
&=(\mathbf{x}+U)+(\mathbf{y}+U) && \text{(商空间中的运算)}\\
&=U+(\mathbf{y}+U) && (\mathbf{x}\in U)\\
&=\mathbf{y}+U && (U\text{ 是 }V/U\text{ 中的零})\\
&=\beta_{k+1}(\mathbf{v}_{k+1}+U)+\cdots+\beta_n(\mathbf{v}_n+U). && \text{(商空间中的运算)}
\end{aligned}$$

由此可知, $\mathbf{v}_{k+1}+U,\ldots,\mathbf{v}_n+U$ 是 V/U 的一组基. 从而 $\dim(V/U)=n-k$. $\square$

命题 4.12 *(i)* *设 U 是 V 的子空间, 则 $U\neq V$ 当且仅当 $\dim(U)<\dim(V)$.*

(ii) *设 V_1,V_2 是 V 的子空间. 则*

$$\dim(V_1)+\dim(V_2)=\dim(V_1+V_2)+\dim(V_1\cap V_2).$$

(iii) *设 $\phi:V\longrightarrow W$ 是线性映射. 则*

$$\dim(\ker(\phi))+\dim(\mathrm{im}(\phi))=\dim(V).$$

证明. (i) (方法1) 见上学期第二章第二讲命题 2.14.

(方法2)

$$\dim(U) < \dim(V) \stackrel{(1)}{\iff} \dim(V/U) > 0 \iff V/U \neq \{U\} \iff U \subsetneq V.$$

(ii) (方法1) 见上学期第二章第二讲命题 2.15.

(方法2) 由上周讲义推论 3.6 和定理 4.10,

$$\begin{aligned} &\dim((V_1+V_2)/V_1) = \dim(V_2/(V_1\cap V_2)) \\ \stackrel{(1)}{\Longrightarrow}\ &\dim(V_1+V_2)-\dim(V_1) = \dim(V_2)-\dim(V_1\cap V_2). \end{aligned}$$

(iii) (方法1) 见上学期第二章定理 5.19.

(方法2) 由线性映射基本定理(I)和定理 4.10,

$$\dim(V/\ker(\phi)) = \dim(\mathrm{im}(\phi)) \stackrel{(1)}{\Longrightarrow} \dim(V)-\dim(\ker(\phi)) = \dim(\mathrm{im}(\phi)).$$

例 4.13 设 $\dim(V)=n$, $f\in \mathrm{Hom}(V,F)$ 且 f 不是零映射. 证明: f 是满射且 $\dim(\ker(f))=n-1$.

证明. 因为 $\mathrm{im}(f)\subset F$, 所以 $\dim(\mathrm{im}(f))\leq \dim(F)$. 因为 f 不是零映射, 所以 $\mathrm{im}(f)\neq\{0\}$. 故 $\dim(\mathrm{im}(f))>0$. 由此和 $\dim(F)=1$ 可知, $\dim(\mathrm{im}(f))=1$. 根据命题 *4.12 (i)*, $\mathrm{im}(f)=F$, 即 f 是满射. 再利用命题 *4.12 (iii)*, $\dim(\ker(f))=n-1$. □

命题 4.14 设 $V_1,\ldots,V_k$ 是 V 的子空间. 则

$$\dim(V_1+\cdots+V_k)\leq \dim(V_1)+\cdots+\dim(V_k).$$

等号成立当且仅当 $V_1+\cdots+V_k$ 是直和.

证明. 我们对 k 归纳证明不等式. 当 $k=1$ 时不等式显然成立. 设 $k>1$ 且不等式对 $k-1$ 成立. 则

$$\begin{aligned}
&\dim(V_1+V_2+\cdots+V_k)\\
&=\dim(V_1)+\dim(V_2+\cdots+V_k)\\
&-\dim(V_1\cap(V_2+\cdots+V_k)) \quad (\text{命题 } 4.12\text{ (ii)})\\
&\le\dim(V_1)+\dim(V_2+\cdots+V_k)\\
&\le\dim(V_1)+\dim(V_2)+\cdots+\dim(V_k). \quad (\text{归纳假设})
\end{aligned}$$

设 $V_1+\cdots+V_k$ 是直和. 对 k 归纳. 当 $k=1$ 时显然. 设 $k>1$ 且 $k-1$ 时结论成立.

$$\begin{aligned}
&\dim(V_1+V_2+\cdots+V_k)\\
&=\dim(V_1)+\dim(V_2+\cdots+V_k)\\
&\quad-\dim(V_1\cap(V_2+\cdots+V_k)) && (\text{命题 } 4.12\text{ (ii)})\\
&=\dim(V_1)+\dim(V_2+\cdots+V_k) && (\text{定理 } 1.12\text{ (iii)})\\
&=\dim(V_1)+\dim(V_2)+\cdots+\dim(V_k). && (\text{归纳假设})
\end{aligned}$$

反之, 设 $\dim(V_1+\cdots+V_k)=\dim(V_1)+\cdots+\dim(V_k)$. 我们要证明 $V_1+\cdots+V_k$ 是直和. 假设不是直和. 由定理 1.12 (iii), 存在 $i\in\{1,\ldots,k\}$ 使得

$$V_i\cap(V_1+\cdots+V_{i-1}+V_{i+1}+\cdots+V_n)\neq\{\mathbf{0}\}.$$

不妨设 $i=1$. 则

$$
\begin{aligned}
&\dim(V_1+V_2+\cdots+V_k)\\
&=\dim(V_1)+\dim(V_2+\cdots+V_k)\\
&-\dim(V_1\cap(V_2+\cdots+V_k)) \quad (\because \text{命题 } 4.12 \text{ (ii)})\\
&<\dim(V_1)+\dim(V_2+\cdots+V_k) \quad (\because V_1\cap(V_2+\cdots+V_k)\neq\{\mathbf{0}\})\\
&\leq\dim(V_1)+\dim(V_2)+\cdots+\dim(V_k). \quad (\because \text{刚证的不等式})
\end{aligned}
$$

矛盾. □

推论 4.15 *设 $V_1,\ldots,V_k$ 是 V 的非平凡子空间, B_i 是 V_i 的基底, $i=1,\ldots,k$. 令 $U=V_1+\cdots+V_k$. 如果 U 是 $V_1,\ldots,V_k$ 的直和, 则 $B_1\cup\cdots\cup B_k$ 是 U 的一组基.*

证明. 设 $B=B_1\cup\cdots\cup B_k$. 则 $U=\langle B\rangle$. 只要证 B 是线性无关集即可. 如果不是, 则存在 $\mathbf{v}\in B$ 使得 $\mathbf{v}$ 是 $B\setminus\{\mathbf{v}\}$ 中元素的线性组合. 故 $V=\langle B\setminus\{\mathbf{v}\}\rangle$. 从而

$$\dim(U)<\operatorname{card}(B).$$

我们有

$$\dim(U)\leq\sum_{i=1}^{k}\operatorname{card}(B_i)=\sum_{i=1}^{k}\dim(V_i),$$

与上述命题矛盾. □

5 坐标变换

在本节中 V 是域 F 上的 n 维线性空间.

定义 5.1 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 V 的一组基. 对任意的 $\mathbf{x} \in V$, 存在唯一的 $x_1, \ldots, x_n \in F$ 使得

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{v}_1 + \cdots + x_n\mathbf{v}_n = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

称 $(x_1, \ldots, x_n)^t$ 是 $\mathbf{x}$ 在基底 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 的坐标.

坐标的存在唯一性由 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 的线性无关性可得.

例 5.2 在 $\mathbb{Q}^3$ 中: 设

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(i) 证明: $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 是 $V := \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$ 的一组基.

(ii) 令 $\mathbf{w} = (3, 2, 2)^t$, 判断 $\mathbf{w}$ 是否在 V 中. 如果在计算 $\mathbf{w}$ (做为 V 中的向量)在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 的下的坐标.

解. *(i)* 设 $A = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$. 则

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

因为 $\mathrm{rank}(A)=2$, 所以 $\dim(V)=2$. 因为 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 线性无关, 所以 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 是 V 的一组基.

(ii) 设 $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{Q}$ 使得 $\mathbf{w}=\alpha_1\mathbf{v}_1+\alpha_2\mathbf{v}_2$. 则

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2=3\\ 2\alpha_2=2\\ \alpha_2=2\end{cases}\implies \alpha_1=1,\alpha_2=2.$$

故 $\mathbf{w}\in V$ 且它在 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2$ 下的坐标是 $(1,2)$. 换言之,

$$\mathbf{w}=(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}.$$

定理 5.3 设 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基, $\mathbf{e}'_1,\ldots,\mathbf{e}'_n\in V$. 则 $\mathbf{e}'_1,\ldots,\mathbf{e}'_n$ 是 V 的一组基当且仅当存在唯一的 $P\in\mathrm{GL}_n(F)$ 使得

$$(\mathbf{e}'_1,\ldots,\mathbf{e}'_n)=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)P. \tag{2}$$

(称 P 是从基底 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 到基底 $\mathbf{e}'_1,\ldots,\mathbf{e}'_n$ 的转换矩阵).

证明. 设 $P\in\mathrm{GL}_n(F)$ 使得 (2) 成立. 若 $\alpha_1,\ldots,\alpha_n\in F$ 使得

$$\alpha_1\mathbf{e}'_1+\cdots+\alpha_n\mathbf{e}'_n=\mathbf{0}.$$

则

$$(\mathbf{e}'_1,\ldots,\mathbf{e}'_n)\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)P\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}=\mathbf{0}.$$

因为 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 线性无关, 所以

$$P\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

因为 P 满秩, 所以 $\alpha_1=\cdots=\alpha_n=0$. 于是 $\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_n'$ 线性无关. 因为 $\dim(V)=n$, 所以 $\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_n'$ 是 V 的一组基.

反之, 设 $\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_n'$ 是 V 的一组基. 因为 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基, 所以存在 $P\in \mathrm{M}_n(F)$ 使得 (2) 成立. 我们首先证明 P 可逆. 否则, P 不满秩, 从而存在 $\beta_1, \ldots, \beta_n\in F$, 不全为零, 使得

$$P\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

由 (2),

$$\beta_1\mathbf{e}_1'+\cdots+\beta_n\mathbf{e}_n'=\mathbf{0},$$

即 $\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_n'$ 线性相关. 矛盾. 于是 $P\in \mathrm{GL}_n(F)$. 再设 $Q\in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得

$$(\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_n')=(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)Q.$$

则 $(\mathbf{0}, \ldots, \mathbf{0})=(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)(P-Q)$. 由 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 的线性无关性可知 $P-Q=O$, 即 $P=Q$. 唯一性成立. $\square$

定理 5.4 设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n$ 是 V 的两组基, P 从第一组基到第二组的转换矩阵. 设 $\mathbf{x} \in V$ 在这两组基下的坐标分别是 $(x_1, \ldots, x_n)^t$ 和 $(x'_1, \ldots, , x'_n)^t$. 则

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

证明. 我们计算

$$\mathbf{x} = (\mathbf{e}'_1, \ldots, \mathbf{e}'_n) \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

由坐标的唯一性可知

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \quad \square$$

例 5.5 设 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ 是 $\mathbb{R}^2$ 的标准基. 证明

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

也是一组基. 设 $\mathbf{x} = (5, 1)^t$. 求 $\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 下的坐标.

证明. 通过矩阵表示, 我们有

$$(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}_{P}.$$

因为 A 可逆, 所以由定理 *5.3* 可知, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 是基. 计算得

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

再根据定理 *5.4*, $\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ 下的坐标是

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

例 5.6 判断 $p_1 = x(x-1), p_2 = x(x-2), p_3 = x(x-2)+1$ 在 $F[x]^{(3)}$ 中 是不是一组基.

解. 因为 $p_1 = x^2 - x$, $p_2 = x^2 - 2x$, $p_3 = x^2 - 2x + 1$, 所以

$$(p_1, p_2, p_3) = (1, x, x^2) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{P}.$$

因为 $\det(P) = 1 \neq 0$, 所以 A 可逆. 由定理 *5.3*, p_1, p_2, p_3 是一组基.

6 对偶空间简介

在本节中 V 是域 F 上的 n 维线性空间.

线性空间 $\mathrm{Hom}(V, F)$ 称为 V 的对偶空间, 记为 V^*. 换言之, V^* 是 V 上所有线性函数的集合, 其中的加法和数乘由 $\mathrm{Map}(V, F)$ 给出.

定理 6.1 设 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基. 则在 V^* 中存在唯一的一组基 $\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*$ 满足 $\mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \delta_{i,j}, i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. 特别地, $\dim(V^*)$=n. *($\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*$ 称为 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 的对偶基.)*

证明. 对 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, 设 $\mathbf{e}_i^* \in V^*$ 满足 $\mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \delta_{i,j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. 由线性映射基本定理 II 可知这样的 $\mathbf{e}_i^*$ 存在且唯一. 我们只要证明 $\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*$ 是 V^* 的基即可.

设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ 使得 $\alpha_1\mathbf{e}_1^* + \cdots + \alpha_n\mathbf{e}_n^* = \mathbf{0}^*$, 其中 $\mathbf{0}^*$ 代表 V^* 中的零元, 即零函数. 设 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. 则

$$0 = \mathbf{0}^*(\mathbf{e}_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\mathbf{e}_i^*\right)(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\delta_{i,j} = \alpha_j.$$

于是 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, 即 $\mathbf{e}_1^*, \ldots, \mathbf{e}_n^*$ 线性无关.

再设 $f \in V^*$ 且 $f(\mathbf{e}_j) = \beta_j, j = 1, 2, \ldots, n$. 令

$$g = \beta_1\mathbf{e}_1^* + \cdots + \beta_n\mathbf{e}_n^*.$$

则对于任意 $j \in \{1.2. \ldots, n\}$, 我们有

$$g(\mathbf{e}_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i\mathbf{e}_i^*\right)(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i\delta_{i,j} = \beta_j.$$

再由线性映射基本定理 II 中的唯一性可知, $f = g$. □

例 6.2 对偶基为取坐标提供方便. 设 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$. 证明*:* 对任意 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $x_i = \mathbf{e}_i^*(\mathbf{x})$.

证明. 我们计算

$$\mathbf{e}_i^*(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_i^*\left(\sum_{j=1}^n x_j\mathbf{e}_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j\mathbf{e}_i^*(\mathbf{e}_j) = \sum_{j=1}^n x_j\delta_{i,j} = x_i. \quad \square$$

由此我们可以得出 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 当且仅当 $\mathbf{e}_i^*(\mathbf{x}) = 0$ 对任意 $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 成立.

引理 6.3 设 $f_1, \ldots, f_n$ 是 V^* 的一组基, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. 则 $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ 当且仅当 $f_i(\mathbf{x}) = f_i(\mathbf{y})$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

证明. 设 $\mathbf{z} \in V$. 只要证明:

$$\mathbf{z} = \mathbf{0} \iff f_1(\mathbf{z}) = \cdots = f_n(\mathbf{z}) = \mathbf{0}.$$

"$\Longrightarrow$" 是显然的.

"$\Longleftarrow$". 假设 $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$. 由线性映射基本定理 II 可知, 存在 $f \in V^*$ 使得 $f(\mathbf{z}) = 1$. 因为 $f_1, \ldots, f_n$ 是 V^* 的基底, 所以存在 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ 使得 $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i$. 于是, $f(\mathbf{z}) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i f_i\right)(\mathbf{z}) = \sum_{i=1}^n \alpha_i f_i(\mathbf{z}) = \mathbf{0}$. 矛盾. $\square$

定理 6.4 下列映射

$$\begin{array}{rccc} \phi: & V & \longrightarrow & V^{**} \\ & \mathbf{v} & \mapsto & \epsilon_{\mathbf{v}} \end{array}$$

是线性同构, 其中

$$\begin{array}{rccc} \epsilon_{\mathbf{v}}: & V^* & \longrightarrow & F \\ & f & \mapsto & f(\mathbf{v}). \end{array}$$

证明. 先验证 $\epsilon_{\mathbf{v}} \in V^{**}$. 设 $\alpha, \beta \in F$, $f, g \in V^*$. 则

$$\epsilon_{\mathbf{v}}(\alpha f+\beta g) = (\alpha f+\beta g)(\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{v})+\beta g(\mathbf{v}) = \alpha\epsilon_{\mathbf{v}}(f)+\beta\epsilon_{\mathbf{v}}(g).$$

验证完毕. 于是 ϕ 是良定义的.

再验证 ϕ 是线性的. 设 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $\alpha, \beta \in F$. 则对任意的 $f \in V^*$,

$$\epsilon_{\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}}(f) = f(\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}) = \alpha f(\mathbf{u})+\beta f(\mathbf{v}) = \alpha\epsilon_{\mathbf{u}}(f)+\beta\epsilon_{\mathbf{v}}(f).$$

于是 $\epsilon_{\alpha\mathbf{u}+\beta\mathbf{v}} = \alpha\epsilon_{\mathbf{u}} + \beta\epsilon_{\mathbf{v}}$, 即 $\phi(\alpha\mathbf{u} + \beta\mathbf{v}) = \alpha\phi(\mathbf{u}) + \beta\phi(\mathbf{v})$.

最后, 我们验证 ϕ 时双射. 由定理 6.1 可知, $\dim(V^{**})=n$. 因为 $\mathrm{im}(\phi) \subset V^{**}$ 且 $\dim(\ker(\phi)) + \dim(\mathrm{im}(\phi)) = n$. 我们只要验证 $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}\}$ 即可. 设 $\phi(\mathbf{v}) = \mathbf{0}^{**}$, 其中 $\mathbf{0}^{**}$ 代表 V^{**} 中的零元. 则对任意的 $f \in V^*$, $f(\mathbf{v}) = 0$. 由引理 6.3 可知, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. $\square$

上述定理中的线性同构 ϕ 的定义与基底无关, 此时我们说 V 与 V^{**} 自然同构.

7 双线性型

本节中 V 是 F 上的 n 维线性空间, $n > 0$.

7.1 定义和矩阵表示

设

$$\begin{aligned} f:\ V \times V &\longrightarrow F \\ (\mathbf{x}, \mathbf{y}) &\mapsto f(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \end{aligned}$$

如果对任意的 $\alpha, \beta \in F$ 和 $\mathbf{z} \in V$ 满足

$$f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{z}, \mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta f(\mathbf{z}, \mathbf{y})$$

和

$$f(\mathbf{x}, \alpha\mathbf{y} + \beta\mathbf{z}) = \alpha f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta f(\mathbf{x}, \mathbf{z}),$$

则称 f 是 V 上的双线性型.

例 7.1 设 f 是 V 上的双线性型. 则对任意的 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$ 和 $\alpha, \beta \in F$, 我们有:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) &= f(\mathbf{u}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) \\ &= f(\mathbf{u}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{u}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{v}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{v} + \mathbf{y}) \end{aligned}$$

且

$$f(\alpha\mathbf{x}, \beta\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}, \beta\mathbf{y}) = \alpha\beta f(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

此外

$$f(\mathbf{0}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{0} + \mathbf{0}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{0}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{0}, \mathbf{y}) \implies f(\mathbf{0}, \mathbf{y}) = 0.$$

同理, $f(\mathbf{x}, \mathbf{0}) = 0$.

定理 7.2 设 V 的一组基是 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$, f 是 V 上的双线性型. 则存在唯一的矩阵 $A \in \mathrm{M}_n(F)$ 使得,

$$\forall\ \mathbf{x} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ \mathbf{y} = (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

我们有

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (x_1, \ldots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

事实上, $A = (f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j))_{n\times n}$. 称 A 是 f 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵表示.

证明. 我们计算

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= f\left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{e}_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i f\left(\mathbf{e}_i, \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{e}_j\right) \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n y_j f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) x_i y_j. \end{aligned}$$

令 $A=(f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j))_{n\times n}$. 由上式直接验证得

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y})=(x_1,\ldots,x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

再设 $B=(b_{i,j})\in \mathrm{M}_n(F)$ 使得

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y})=(x_1,\ldots,x_n)B\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}.$$

对 $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$, 取 $\mathbf{x}=\mathbf{e}_i,\mathbf{y}=\mathbf{e}_j$, 则

$$f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)=\Big(0,\ldots,\underset{\overset{\uparrow}{i}}{1},\ldots,0\Big)\ B\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\ \to j=\vec{B}_i\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\ \to j=b_{i,j}.$$

于是 $A=B$. $\square$

例 7.3 设 $V=\mathbb{R}^2$. 对任意的

$$\mathbf{x}=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},\mathbf{y}=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix},\quad f(\mathbf{x},\mathbf{y}):=\det\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{pmatrix}.$$

验证 f 是 V 上的双线性型, 并求它在标准基下的矩阵.

解. 设 $\alpha,\beta\in F,\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}\in V$,

$$\begin{aligned} f(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{z},\mathbf{y}) = \det(\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{z},\mathbf{y}) &= \det(\alpha\mathbf{x},\mathbf{y})+\det(\beta\mathbf{z},\mathbf{y}) \\ &= \alpha\det(\mathbf{x},\mathbf{y})+\beta\det(\mathbf{z},\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x},\mathbf{y})+\beta f(\mathbf{z},\mathbf{y}). \end{aligned}$$

类似 f 对第二个变元线性. 于是 f 是双线性型.

注意到 $f(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1) = f(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_2) = 0$, $f(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2) = 1$ 而 $f(\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_1) = -1$. 于是

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (x_1,x_2)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

例 7.4 设 $A\in \mathrm{M}_n(F)$. 则

$$\begin{array}{cccc} f: & F^n\times F^n & \longrightarrow & F \\ & \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} & \mapsto & (x_1,\ldots,x_n)A\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{array}$$

是 F^n 上的双线性型, f 在标准基下的矩阵是 A.

证明. 设 $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)^t,\mathbf{y}=(y_1,\ldots,y_n)^t,\mathbf{z}=(z_1,\ldots,z_n)^t$, $\alpha,\beta\in F$. 则

$$\begin{aligned} f(\alpha\mathbf{x}+\beta z,y) &= (\alpha\mathbf{x}+\beta\mathbf{z})^t A\mathbf{y} \\ &= \alpha(\mathbf{x}^t A\mathbf{y})+\beta(\mathbf{z}^t A\mathbf{y}) \\ &= \alpha f(\mathbf{x},\mathbf{y})+\beta f(\mathbf{z},\mathbf{y}). \end{aligned}$$

于是, f 对第一个变元线性. 类似可验证 f 对第二个变元也线性. 从而 f 是双线性型. 设 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 是 F^n 的标准基, $A=(a_{i,j})_{n\times n}$. 则 $f(\mathbf{e}_i,\mathbf{e}_j)=a_{i,j}$, $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$. 由定理 7.2, f 在标准基下的矩阵是 A. $\square$

设 f 是 V 上的双线性型, f 在 V 的两组基 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$ 下的矩阵分别是 A 和 B. 再设

$$(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)P,\quad P\in\mathrm{GL}_n(F).$$

设 $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n=u_1\epsilon_1+\cdots+u_n\epsilon_n$, $\mathbf{y}=y_1\mathbf{e}_1+\cdots+y_n\mathbf{e}_n=v_1\epsilon_1+\cdots+v_n\epsilon_n$. 则由坐标变换公式可得

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x},\mathbf{y})&=(x_1,\ldots,x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}\\ &=(u_1,\ldots,u_n)\underbrace{P^tAP}_{B}\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

根据定理 7.2, $B=P^tAP$. 反之, 给定 F^n 的一组基 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 和 $P\in\mathrm{GL}_n(F)$, f 在给定基底下的矩阵是 A, 则 $(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)P$ 是 F^n 的一组基. 由上述计算可知 f 在新的基底下的矩阵是 P^tAP.

反推上述过程可知, 如果双线性型 $f(\mathbf{x},\mathbf{y})$ 在基底 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵是 A, 且 $B=P^tAP$, 其中 $P\in\mathrm{GL}_n(F)$.

则 B 是该双线性型在基底 $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)P$ 下的矩阵.

定义 7.5 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$. 如果存在 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得 $B = P^tAP$, 则称 B 合同于 A, 记为 $B \sim_c A$.

我们来验证 $\sim_c$ 是等价关系. 对任意 $A \in \mathrm{M}_n(F)$, $A = E^tAE \implies A \sim_c A$. 自反性成立. 设 $B \sim_c A$. 则存在 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得 $B = P^tAP$. 于是

$$A = (P^t)^{-1}BP^{-1} = (P^{-1})^tBP^{-1} \implies A \sim_c B.$$

对称性成立. 设 $A \sim_c B$, $B \sim_c C$. 则存在 $P, Q \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得

$$\begin{aligned} & A = P^tBP,\ B = Q^tCQ \\ & \quad \implies A = P^tQ^tCQP = (QP)^tC(QP) \\ & \quad \implies A \sim_c C. \end{aligned}$$

传递性成立.

从以上论述我们看出, 一个双线性型在不同基底下的矩阵是合同的. 而两个彼此合同的矩阵一定是一个双线性型在不同基底下的矩阵. 于是, 研究双线性型等价于研究方阵在合同意义下的等价类. 利用矩阵的语言, 我们所要研究的问题是: $\mathrm{M}_n(F)/\sim_c$ 含有多少不同的等价类？在每个等价类中可否找出一个"标准" 的代表元? 这个代表矩阵中应该含有尽可能多个 0, 而非零元素出现的位置应该尽可能有规律.

命题 7.6 设 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$. 若 $A \sim_c B$, 则 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$.

证明. 设 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得 $A = P^t B P$. 因为 P 满秩, 所以 $\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$. (见上学期讲义第二章推论 4.3) $\square$.

定义 7.7 设 f 是 V 上的双线性型, A 是 f 在 V 的某组基下的矩阵. 则 f 的秩定义为 $\mathrm{rank}(A)$, 记为 $\mathrm{rank}(f)$.

由上述命题可知, $\mathrm{rank}(f)$ 是良定义的. 下例说明双线性型可以通过矩阵给出.

例 7.8 合同关系保持对称和斜对称性. 设 $A \in \mathrm{M}_n(F)$ *(斜)*对称, 且 $A \sim_c B$. 证明 B 也*(斜)*对称.

证明. 设 A 斜对称. 因为 $A \sim_c B$, 所以存在 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$ 使得 $B = P^t A P$. 则

$$B^t = (P^t A P)^t = P^t A^t P = -P^t A P = -B.$$

对称情形类似. $\square$