第一章　空间与形式

7.2　对称双线性型

定义 7.11 设 f 是 V 上的双线性型. 如果对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, 则称 f 是对称双线性型.

命题 7.12 设 f 是 V 上的双线性型, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基, A 是 f 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵. 则 f 是对称的当且仅当 A 是对称的.

证明. 设 f 对称. 则对任意 $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, 我们有 $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = f(\mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i)$. 故 $A = (f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j))_{n\times n}$ 对称. 反之, 设 A 对称, $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的坐标分别是 $(x_1, \ldots, x_n)^t$ 和 $(y_1, \ldots, y_n)^t$. 则

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= (x_1, \ldots, x_n) A (y_1, \ldots, y_n)^t \\ &= (y_1, \ldots, y_n) A^t (x_1, \ldots, x_n)^t \quad (\because F \text{ 中的元素转置不变}) \\ &= (y_1, \ldots, y_n) A (x_1, \ldots, x_n)^t = f(\mathbf{x}, \mathbf{y}). \quad (\because A^t = A) \end{aligned}$$

故 f 对称. □

空间 V 上的所有对称双线性型记为 $\mathcal{L}_2^+(V)$. 本节的主要结果是

定理 7.13 设 F 的特征不等于 2 且 $f \in \mathcal{L}_2^+(V)$. 则 V 中有一组基使得 f 在该基下的矩阵是对角阵.

证明该定理需要对称双线性型的极化公式. 设 F 的特征不等于 2 且 $f \in \mathcal{L}_2^+(V)$. 则对于任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}\left(f(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - f(\mathbf{y}, \mathbf{y})\right). \tag{1}$$

验证如下:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\left(f(\mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}+\mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - f(\mathbf{y}, \mathbf{y})\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{y}) - f(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - f(\mathbf{y}, \mathbf{y})\right) && \text{(双线性)} \\
&= \frac{1}{2}\left(f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + f(\mathbf{y}, \mathbf{x})\right) \\
&= f(\mathbf{x}, \mathbf{y}). && \text{(对称性)}
\end{aligned}$$

定理 7.13 的证明. 如果 f 是零映射, 则 f 在 V 的任意基底下的矩阵都是零矩阵. 定理显然成立. 设 f 不是零映射. 再设 $n = \dim(V)$. 我们对 n 归纳. 当 $n = 1$ 时, 定理显然成立. 设 $n > 1$ 且定理对 $n-1$ 成立.

由极化公式 (1), 存在 $\mathbf{e}_1 \in V$ 使得 $f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) \neq 0$. 令 $W = \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}, \mathbf{e}_1) = 0\}$. 可直接验证 W 是子空间. 我们来证明

$$V = \langle \mathbf{e}_1 \rangle \oplus W. \tag{2}$$

首先, 设 $\mathbf{x} \in \langle \mathbf{e}_1 \rangle \cap W$. 则 $\mathbf{x} = \lambda \mathbf{e}_1$, 其中 $\lambda \in F$, 且 $f(\lambda \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 0$. 于是 $\lambda f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = 0$. 因为 $f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) \neq 0$, 所以 $\lambda = 0 \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}$. 由第一章第一讲定理 1.12 (iii), $\langle \mathbf{e}_1 \rangle + W$ 是直和. 由第一章第二讲命题 4.15, 只要证明

$\dim(W) = n-1$ 即可. 考虑线性映射

$$\begin{array}{rccc} \phi\colon & V & \longrightarrow & F \\ & \mathbf{x} & \mapsto & f(\mathbf{x}, \mathbf{e}_1). \end{array}$$

则 $W = \ker(\phi)$. 因为 $\phi(\mathbf{e}_1) \neq 0$, 所以 $\dim(\mathrm{im}(\phi)) \geq 1$. 但 $\mathrm{im}(\phi) \subset F$ 且 $\dim F = 1$. 于是 $\mathrm{im}(\phi) = F$. 特别地 $\dim(\mathrm{im}(\phi)) = 1$. 由对偶公式, $\dim(W) = n-1$. 直和分解 (2) 成立.

设 $g \in \mathcal{L}_2(W)$ 满足对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in W$, $g(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{y})$. 由归纳假设存在 W 的一组基 $\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ 使得 g 在该基下的矩阵是对角的, 即对任意的 $i, j \in \{2, 3, \ldots, n\}, i \neq j$, 我们有 $g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$. 由 (2), $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ 线性无关 (见第一章第一讲定理 1.12 (ii))且 $\dim(V) = n$. 于是 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 V 的一组基. 由 W 的定义可知

$$f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_1) = 0, \quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

在由 f 的对称性可知

$$f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_i) = 0, \quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

综上所述 $f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 且 $i \neq j$. 于是 f 在 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵是对角阵. □

定义 7.14 设 $f \in \mathcal{L}_2^+(V)$, f 在 V 的基底 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 下的矩阵是对角阵. 则称 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 f 的一组规范基. 设双线

性型 f 在一组规范基下的矩阵为 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. 则

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y})=\lambda_1x_1y_1+\cdots+\lambda_nx_ny_n$$

称为与规范基对应的规范型, 其中 $\mathbf{x}=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_n\mathbf{e}_n$, $\mathbf{y}=y_1\mathbf{e}_1+\cdots+y_n\mathbf{e}_n$.

推论 7.15 设 F 的特征不等于 2, $A\in\mathrm{SM}_n(F)$. 则 A 合同于一个对角阵.

证明. 考虑双线性型

$$\begin{array}{cccc} f: & F^n\times F^n & \longrightarrow & F \\ & \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots \\ x_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix} & \mapsto & (x_1,\ldots,x_n)A\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots \\ y_n\end{pmatrix}. \end{array}$$

因为 A 对称, 所以 f 对称. 由上述定理存在 F^n 的一组基使得 f 在该基下的矩阵是对角阵 B. 则 $A\sim_c B$. □

例 7.16 求 $P\in\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ 使得

$$P^t\underbrace{\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}}_{A}P$$

是对角矩阵.

解. 设 f 是 $\mathbb{R}^3$ 上对称双线性型, 它在标准基 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 下的矩阵是 A.

步骤 1. 选取 ϵ_1 使得 $f(\epsilon_1, \epsilon_1) \neq 0$. 令 $\epsilon_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$. 则

$$\begin{aligned} f(\epsilon_1, \epsilon_1) &= f(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \\ &= f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) + f(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 2. \end{aligned}$$

步骤 2. 确定 $W = \ker(f(\mathbf{x}, \epsilon_1))$ 的一组基. 我们计算

$$f(\mathbf{x}, \epsilon_1) = (x_1, x_2, x_3)A(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) = x_1 + x_2 + 2x_3.$$

解方程 $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ 得到 W 的一组基

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

步骤 3. 求 $g := f|_{W \times W}$ 在 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ 下的矩阵

$$B = \begin{pmatrix} f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_1) & f(\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2) \\ f(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_1) & f(\mathbf{w}_2, \mathbf{w}_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

到此降维到 W 上的对称双线性型 g.

步骤 1. 选取 ϵ_2 使得 $g(\epsilon_2, \epsilon_2) \neq 0$. 令 $\epsilon_2 = \mathbf{w}_1$.

步骤 2. 确定 $Z = \ker(g(\mathbf{x}, \epsilon_2))$ 的一组基. 我们计算

$$g(\mathbf{y}, \epsilon_2) = (y_1, y_2)B \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2y_1 - 2y_2.$$

解方程 $-2y_1-2y_2=0$ 得到解空间的一组基

$$\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \Longrightarrow Z \text{ 的基是 } (\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}.$$

于是, f 在 $\mathbb{R}^3$ 中的一组规范基是

$$\epsilon_1=\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\quad \epsilon_2=\mathbf{w}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad \epsilon_3=\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

从 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$ 到 $\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3$ 的矩阵是

$$P=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

计算得

$$P^tAP=\mathrm{diag}(2,-2,-2).$$

例 7.17 设

$$A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\in \mathrm{SM}_2(\mathbb{Z}_2).$$

证明 A 不合同于对角方阵.

证明. 设

$$P=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$$

使得 $P^tAP = \mathrm{diag}_2(u,v)$. 则

$$P^tAP = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ac & ad+bc \\ ad+bc & 2bd \end{pmatrix} = \mathrm{diag}_2(u,v).$$

于是 $u=v=0$ ($\because\ 2=0$). 由此可知 $\mathrm{rank}(A)=0$. 矛盾.

推论 7.18 设 $f \in \mathcal{L}_2^+(V)$ 且 $r = \mathrm{rank}(f)$. 则存在 V 的一组规范基使得 f 在该基下的矩阵是

$$\mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, 0, \cdots, 0),$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \in F \setminus \{0\}$.

证明. 由定理 7.13, 存在 f 规范基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$. 于是

$$f(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = 0, \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ 且 } i \neq j.$$

因为 $r = \mathrm{rank}(A)$, 所以在 $f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1), \ldots, f(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_n)$ 中恰好有 r 个非零. 适当调整下标后, 我们可以得到一组新的规范基 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 满足 $\{\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n\} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$,

$$f(\epsilon_i, \epsilon_i) \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, r,\ \text{ 且 } f(\epsilon_j, \epsilon_j) = 0,\ j = r+1, r+2, \ldots, n.$$

令 $\lambda_i = f(\epsilon_i, \epsilon_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, 即可. $\square$

推论 7.19 设 $A \in \mathrm{SM}_n(F)$ 且 $\mathrm{rank}(A) = r$. 则存在 F 中非零元素 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ 使得 $A \sim_c \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, 0, \cdots, 0)$.

证明. 由上述推论直接可得. □

例 7.20 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{C})$ 且 $r = \mathrm{rank}(A)$. 则

$$A \sim_c \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}.$$

证明. 由推论 *7.19*, $A \sim_c \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, 0, \cdots, 0)$, 其中 $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ 是非零复数. 由代数学基本定理 $\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_r}$ 是复数. 令

$$P = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_r}}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{n-r}\right).$$

则 $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 且对称. 直接计算

$$\begin{aligned} A &\sim_c P^t \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, 0, \cdots, 0) P \\ &= P^t \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, 0, \cdots, 0) P \\ &= \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

注解 7.21 设 $f \in \mathcal{L}_2^+(\mathbb{C}^n)$ 且 $r = \mathrm{rank}(f)$. 则存在 $\mathbb{C}^n$ 的一组基 $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$ 使得对任意 $\mathbb{C}^n$ 中向量 $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \epsilon_i$ 和 $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n y_i \epsilon_i$, 我们有

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \cdots + x_r y_r.$$

8 二次型 (quadratic forms)

我们从双线性型的角度引入二次型, 这样可以使我们可以直接应用双线性型的结论. 然后我们说明二次型和二次齐次多项式之间的关系. 在本节中 V 是域 F 上的有限维线性空间, F 的特征不是 2.

8.1 从双线性型到二次型

定义 8.1 *设 $q : V \longrightarrow F$ 称为 V 上的二次型, 如果*

(i) 对于任意的 $\mathbf{v} \in V$, $q(\mathbf{v}) = q(-\mathbf{v})$;

(ii) 对于任意的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$,

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}(q(\mathbf{x} + \mathbf{y}) - q(\mathbf{x}) - q(\mathbf{y}))$$

是 V 上的对称双线性型. f 称为 q 的配极.

注解 8.2 *设 q 是 V 上的二次型. 则 $q(\mathbf{0}) = 0$. 这是因为在上述定义条件 (ii) 中代入 $\mathbf{x} = \mathbf{y} = \mathbf{0}$, 得到*

$$0 = f(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = -\frac{1}{2}q(\mathbf{0}) \implies q(\mathbf{0}) = 0.$$

下面的命题说明二次型和配极之间的关系.

命题 8.3 *设 $q : V \rightarrow F$. 则 q 是二次型当且仅当存在 $f \in \mathcal{L}_2^+(V)$ 使得 $\forall\ \mathbf{x} \in V$, $q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. 此时, q 的配极是 f.*

证明. 设 q 是二次型. 由定义 8.1 中的 (ii) 和 (i) 可知.

$$
\begin{aligned}
&-f(\mathbf{x},\mathbf{x}) = f(\mathbf{x},-\mathbf{x}) \overset{(ii)}{=} \frac{1}{2}(q(\mathbf{0}) - q(\mathbf{x}) - q(-\mathbf{x})) \\
&= -\frac{1}{2}(q(\mathbf{x}) + q(-\mathbf{x})) \overset{(i)}{=} -q(\mathbf{x}).
\end{aligned}
$$

于是, $q(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x},\mathbf{x})$.

反之, 直接计算得

$$
q(-\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x},-\mathbf{x}) = f(\mathbf{x},\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}).
$$

由对称双线性型的极化公式定义 8.1 中 (ii) 成立. □

推论 8.4 设 q 是 V 上的二次型. 则对任意的 $\alpha \in F$ 和 $\mathbf{v} \in V$, $q(\alpha\mathbf{v}) = \alpha^2 q(\mathbf{v})$.

证明. 设 $f \in \mathcal{L}_2^+(V)$ 是 q 的配极. 由上述命题 (i),

$$
q(\alpha\mathbf{x}) = f(\alpha\mathbf{x},\alpha\mathbf{x}) = \alpha^2 f(\mathbf{x},\mathbf{x}) = \alpha^2 q(\mathbf{x}). \quad \square
$$

定理 8.5 设 V 的一组基是 $\mathbf{e}_1,\dots,\mathbf{e}_n$, q 是 V 上的二次型. 则存在唯一的矩阵 $A \in \mathrm{SM}_n(F)$ 使得对于任意的 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ 使得

$$
q(\mathbf{x}) = (x_1,\dots,x_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.
$$

证明. 设 f 是 q 的配极, A 是 f 在 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵. 则 $A \in \mathrm{SM}_n(F)$ 且对任意的 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_n\mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{y} = y_1\mathbf{e}_1 + \cdots + y_n\mathbf{e}_n$, 我们有

$$f(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (x_1,\ldots,x_n)A\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{命题 } 8.3} q(\mathbf{x}) = (x_1,\ldots,x_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

存在性成立.

再设 $B \in \mathrm{SM}_n(F)$ 使得

$$q(\mathbf{x}) = (x_1,\ldots,x_n)B\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

令

$$\begin{array}{rccc} g: & V \times V & \longrightarrow & F \\ & (\mathbf{x},\mathbf{y}) & \mapsto & (x_1,\ldots,x_n)B\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \end{array}$$

可直接验证 $g \in \mathcal{L}_2^+(V)$. 因为 $g(\mathbf{x},\mathbf{x}) = q(\mathbf{x})$, 所以 g 是 q 的配极 (命题 8.3 (ii)) 且 B 是 g 在 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵. 因为 $f = g$, 所以 $A = B$. 唯一性成立. $\square$

称矩阵 A 是二次型 q 在基底 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵. 进而, 配极 f 的秩称为 q 的秩, 记为 $\mathrm{rank}(q)$.

定理 8.6 设 V 的两组基是 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{e}_1',\ldots,\mathbf{e}_n'$, 且

$$(\mathbf{e}_1',\ldots,\mathbf{e}_n')=(\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n)P,$$

其中 $P\in\mathrm{GL}_n(F)$. 设 V 上的二次型 q 在 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 下的矩阵为 A, 在 $\mathbf{e}_1',\ldots,\mathbf{e}_n'$ 下的矩阵为 B. 则 $B=P^tAP$.

证明. 设 f 是 q 的配极. 则 A 和 B 分别是 f 在 $\mathbf{e}_1,\ldots,\mathbf{e}_n$ 和 $\mathbf{e}_1',\ldots,\mathbf{e}_n'$ 下的矩阵. 故 $B=P^tAP$. $\square$

定理 8.7 设 q 是 V 上的二次型. 则存在 V 的一组基 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$ 使得 q 在该基下的矩阵是对角阵. 再设该对角阵是 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. 则对任意 $\mathbf{x}=x_1\epsilon_1+\cdots+x_n\epsilon_n\in V$,

$$q(\mathbf{x})=\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_nx_n^2. \tag{3}$$

证明. 设 q 的配极是 f. 由上一节定理 7.12 得出, f 的规范基 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$. 于是 q 在该基下的矩阵是对角阵. 设该对角阵是 $\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$. 则对任意的 $\mathbf{x}=x_1\epsilon_1+\cdots+x_n\epsilon_n$, $\mathbf{y}=y_1\epsilon_1+\cdots+y_n\epsilon_n\in V$, $f(\mathbf{x},\mathbf{y})=\lambda_1x_1y_1+\cdots+\lambda_nx_ny_n$. 故 $q(\mathbf{x})=f(\mathbf{x},\mathbf{x})=\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_nx_n^2$. $\square$

基于上述定理, 我们称 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$ 是 q 的一组规范基, (3) 是 q 的一个规范型.

由上一节推论 7.17 可知

推论 8.8 设 q 是 V 上的二次型且 $r=\mathrm{rank}(q)$. 则存在 q 的规范基 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$ 使得对任意 $\mathbf{x}=x_1\epsilon_1+\cdots+x_n\epsilon_n\in V$, $q(\mathbf{x})=\lambda_1x_1^2+\cdots+\lambda_rx_r^2$.

例 8.9 设 $p\in F[x_1,\ldots,x_n]$ 齐二次, 多项式函数 $p:F^n\to F$ 由公式 $p(\mathbf{v})=p(v_1,\ldots,v_n)$ 给出, 其中 $\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_n)^t$ 是 F^n 中的任意元素. 则 p 是 F^n 上的二次型.

证明. 因为 p 是齐二次的, 所以 $p=\sum_{1\le i\le j\le n}\alpha_{i,j}x_ix_j$. 令 $\beta_{i,i}=\alpha_{i,i}$, $i=1,2\ldots,n$, $\beta_{i,j}=\alpha_{i,j}/2$, $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$, 其中 $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$ 且 $i<j$. 而 $\beta_{j,i}=\beta_{i,j}$, 其中 $i,j\in\{1,2,\ldots,n\}$ 且 $i<j$. 则

$$\begin{aligned}p&=\sum_{i=1}^n\beta_{i,j}x_i^2+\sum_{i,j=1,i\ne j}^n\beta_{i,j}x_ix_j=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\beta_{i,j}x_ix_j\\&=(x_1,\ldots,x_n)\underbrace{\begin{pmatrix}\beta_{1,1}&\cdots&\beta_{1,n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\\beta_{n,1}&\cdots&\beta_{n,n}\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由 $\beta_{i,j}$ 的定义可知, A 是对称的. 令 f 是在标准基下矩阵是 A 的对称双线性型. 则

$$f(\mathbf{v},\mathbf{v})=(v_1,\ldots,v_n)A(v_1,\ldots,v_n)^t=p(\mathbf{v}).$$

于是, p 是 F^n 上的二次型. 它在标准基下的矩阵等于 A.

由 $\beta_{i,j}$ 的定义可知,

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{1,1} & \frac{\alpha_{1,2}}{2} & \cdots & \frac{\alpha_{1,n}}{2}\\ \frac{\alpha_{1,2}}{2} & \alpha_{2,2} & \cdots & \frac{\alpha_{2,n}}{2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\alpha_{1,n}}{2} & \frac{\alpha_{2,n}}{2} & \cdots & \alpha_{n,n}\end{pmatrix}.$$

例 8.10 设 $p=x_2^2-x_1x_2+4x_2x_3$. 求 p 在 $\mathbb{R}^3$ 的标准基下的矩阵和秩.

解. 由上例可知,

$$A=\begin{pmatrix}0 & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & 1 & 2\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

由定义得出 $\operatorname{rank}(p)=\operatorname{rank}(A)=2$.

8.2 配方法和行列相伴

我们用一个具体的例子说明如何用配方法把一个二次型化为它的规范型.

例 8.11 设 $p=2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3\in\mathbb{R}[x_1,x_2,x_3]$. 求 $\mathbb{R}^3$ 上二次型 p 的一组规范基和一个规范型.

解. 设

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_1} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

则

$$\begin{aligned} p &= 2y_1^2 - 2y_2^2 + 4y_1y_3 \\ &= 2(y_1^2 + 2y_1y_3 + y_3^2) - 2y_2^2 - 2y_3^2 \\ &= 2(y_1 + y_3)^2 - 2y_2^2 - 2y_3^2. \end{aligned}$$

设

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{P_2} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

则 $p = 2z_1^2 - 2z_2^2 - 2z_3^2$. 注意到

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P_1P_2^{-1} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

设 A 是 p 在标准基下的矩阵. 则

$$p=(x_1,x_2,x_3)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=(z_1,z_2,z_3)\left(P_1P_2^{-1}\right)^t A(P_1P_2^{-1})\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$$

$$=(z_1,z_2,z_3)\mathrm{diag}(2,-2,-2)\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}.$$

于是, $A\sim_c \mathrm{diag}(2,-2,-2)$ 且 规范基是

$$P_1P_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&-1\\1&-1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

的三个列向量.

设 $F_{i,j}$ 是 n 阶第一类初等矩阵, $i,j\in\{1,\dots,n\}$, $F_{i,j}(\lambda)$ 是第二类初等矩阵, 其中 $i,j\in\{1,\dots,n\}$, $i\neq j$, $\lambda\in F$.

引理 8.12 设 $A=(a_{k,\ell})\in\mathrm{SM}_n(F)$, $B=F_{i,j}^tAF_{i,j}$ 是对称

矩阵且

$$B = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{1,1}} & & \downarrow^{i} & & \downarrow^{j} & & \phantom{a_{1,n}} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j,1} & \cdots & \underline{a_{j,j}} & \cdots & a_{j,i} & \cdots & a_{j,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & \underline{a_{i,i}} & \cdots & a_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,i} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \to i \\ \\ \to j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}.$$

证明. 因为 $F_{i,j}$ 对称, 所以 $B \sim_c A$. 由 A 对称得出 B 对称. 由初等行变换可知 $F_{i,j}A$ 仅仅置换 A 的第 i 和第 j 行. 再由初等列变换可知 $(F_{i,j}A)F_{i,j}$ 仅仅置换 $F_{i,j}A$ 的第 i 和第 j 列. 从而, $B = F_{i,j}AF_{i,j}$. □

引理 8.13 设 $A = (a_{k,\ell}) \in \mathrm{SM}_n(F)$, $B = F_{i,j}(\lambda)^t A F_{i,j}(\lambda)$ 是对称矩阵且

$$B = \begin{array}{cc} \begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{j,1} + \lambda a_{i,1}} & & \downarrow^{i} & & \downarrow^{j} & & \phantom{a_{j,n} + \lambda a_{i,n}} \end{array} & \\ \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i} & \cdots & a_{1,j} + \lambda a_{1,i} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,i} & \cdots & \underline{a_{i,j} + \lambda a_{i,i}} & \cdots & a_{j,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j,1} + \lambda a_{i,1} & \cdots & \underline{a_{j,i} + \lambda a_{i,i}} & \cdots & \boxed{a_{j,j} + 2\lambda a_{i,j} + \lambda^2 a_{i,i}} & \cdots & a_{j,n} + \lambda a_{i,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i} & \cdots & a_{n,j} + \lambda a_{n,i} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \to i \\ \\ \to j \\ \\ \\ \end{array} \end{array}.$$

证明. 矩阵 B 显然对称. 由初等行变换可知 $F_{i,j}^t(\lambda)A$ 仅仅把 A 的第 i 行通乘 λ 后加到第 j 行上. 再由初等列变换可

知 $(F_{i,j}(\lambda)^t A)F_{i,j}(\lambda)$ 仅仅把 A 的第 i 列通乘 λ 后加到第 j 列上. 从而, $B = F_{i,j}(\lambda)^t A F_{i,j}(\lambda)$. □

对对称矩阵做有限次上述两个引理中的操作得到的矩阵称为通过(初等)行列相伴变换得到的矩阵.

引理 8.14 设域 F 的特征不等于 2, $A \in \mathrm{SM}_n(F)$. 如果 A 中对角线上元素都等于零但 $A \neq O$, 则我们可以通过行列相伴变换把 A 变成对称矩阵 $B = (b_{i,j})$ 使得 $b_{1,1} \neq 0$. 特别地, $A \sim_c B$.

证明. 设 $A = (a_{k,\ell})_{n\times n}$, 其中某个 $a_{i,j} \neq 0$, 且 $i \neq j$. 则 $F_{i,j}(1)^t A F_{i,j}(1)$ 在第 j 行 j 列处的元素是

$$a_{j,j} + 2a_{i,j} + a_{i,i} = 2a_{i,j} \neq 0.$$

这是因为引理 8.13 和 $2 \neq 0$. 根据引理 8.12,

$$B = F_{1,j}(F_{i,j}(1)^t A F_{i,j}(1))F_{1,j}. \quad \square$$

定理 8.15 设域 F 的特征不等于 2, $A \in \mathrm{SM}_n(F)$. 则我们可以通过初等行伴列变换得到对角矩阵.

证明. 我们对 n 归纳. 当 $n = 1$ 时, A 是对角阵. 定理显然成立. 设 $n > 1$ 且定理对 $n-1$ 成立. 我们考虑 n 阶对称矩阵 A. 如果 $A = O$, 则 A 已经是对角矩阵. 下面设 $A = (a_{i,j}) \neq O$.

由引理 8.14, 我们可以进一步假设 $a_{1,1} \neq 0$. 由引理 8.13,

$$F_{1,n}\left(-\frac{a_{n,1}}{a_{1,1}}\right)^t \cdots F_{1,2}\left(-\frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}\right)^t A \underbrace{F_{1,2}\left(-\frac{a_{2,1}}{a_{1,1}}\right) \cdots F_{1,n}\left(-\frac{a_{n,1}}{a_{1,1}}\right)}_{M} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & O_{1\times(n-1)} \\ O_{(n-1)\times 1} & B \end{pmatrix}.$$

其中 $B \in \mathrm{SM}_{n-1}(F)$. 由归纳假设存在 $Q \in \mathrm{GL}_n(F)$ 是第一类和第二类初等矩阵之积使得 $Q^t BQ$ 是对角矩阵. 令

$$P = \begin{pmatrix} 1 & O_{1\times(n-1)} \\ O_{(n-1)\times 1} & Q \end{pmatrix}.$$

则 $(MP)^t A(MP)$ 是对角阵. □

例 8.16 设

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{SM}_3(\mathbb{R}).$$

利用行列相伴变换把 A 化成对角阵 B, 并计算 $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ 使得 $B = P^t AP$.

解.

$$(A|E)=\begin{pmatrix}0&1&1&|&1&0&0\\1&0&1&|&0&1&0\\1&1&0&|&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{把第}2\text{行加到第}1\text{行}}\begin{pmatrix}1&1&2&|&1&1&0\\1&0&1&|&0&1&0\\1&1&0&|&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{对称操作}}\begin{pmatrix}2&1&2&|&1&1&0\\1&0&1&|&0&1&0\\2&1&0&|&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第}1\text{行通乘 }-\frac{1}{2}\text{ 加到第}2\text{行}}\begin{pmatrix}2&1&2&|&1&1&0\\0&\frac{-1}{2}&0&|&\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}&0\\2&1&0&|&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{对称操作}}\begin{pmatrix}2&0&2&|&1&1&0\\0&\frac{-1}{2}&0&|&\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}&0\\2&0&0&|&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{第}1\text{行通乘 }-1\text{ 加到第}3\text{行}}\begin{pmatrix}2&0&2&|&1&1&0\\0&\frac{-1}{2}&0&|&\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&-2&|&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{对称操作}}\begin{pmatrix}2&0&0&|&1&1&0\\0&\frac{-1}{2}&0&|&\frac{-1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&0&-2&|&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

设

$$P=\begin{pmatrix}1&\frac{-1}{2}&-1\\1&\frac{1}{2}&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\Longrightarrow P^tAP=\operatorname{diag}\left(2,-\frac{1}{2},-2\right).$$

8.3 齐二次多项式的因式分解

命题 8.17 设 $p \in F[x_1, \ldots, x_n]$, 非零齐二次. 如果 p 可以分解为两个一次多项式之积, 则 p 作为 F^n 上的二次型的秩小于 3.

证明. 设 $p = fg$, 其中 f, g 是 $F[x_1, \ldots, x_n]$ 的齐一次多项式. 进而, 令

$$f = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n, \quad g = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n,$$

其中 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$ 不全为零, $\beta_1, \ldots, \beta_n \in F$ 也不全为零. 直接计算得 p 做为 F^n 上得二次型的矩阵是

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{\alpha_i \beta_j + \beta_i \alpha_j}{2} \right)_{n \times n} \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} (\beta_1, \ldots, \beta_n)}_{B} + \underbrace{\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}_{C}. \end{aligned}$$

于是, $\operatorname{rank}(p) = \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B + C) \le \operatorname{rank}(B) + \operatorname{rank}(C) = 2$ [1]. $\square$

例 8.18 设 $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ 是齐二次的(非零)多项式. 则 f 可以分解为两个一次多项式之积当且仅当 f 作为二次型的秩小于 3.

[1] $V_c(B + C) \subset V_c(B) + V_c(C) \implies \operatorname{rank}(B + C) \le \dim(V_c(B) + V_c(C)) \le \dim(V_c(B)) + \dim(V_c(C)) = \operatorname{rank}(B) + \operatorname{rank}(C)$.

证明. 根据上述命题, 只要证明 $\mathrm{rank}(f)<3$ 时, f 是两个齐一次多项式之积. 设

$$f(x_1,\ldots,x_n)=(x_1,\ldots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

则 $A{\in}\mathrm{SM}_n(\mathbb{C})$. 根据例 *7.20*, 存在 $P\in\mathrm{GL}_n(F)$ 使得

$$A=P^t\begin{pmatrix}E_r & O\\ O & O\end{pmatrix}P,$$

其中 $r=\mathrm{rank}(A)$. 令

$$\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}=Q\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix},$$

其中 $Q=(q_{i,j})=P^{-1}$. 则 $f(x_1,\ldots x_n)=y_1^2+y_2^2+\cdots+y_r^2$. 如果 $r=1$, 则

$$f(x_1,\ldots x_n)=y_1^2=(q_{1,1}x_1+\cdots+q_{1,n}x_n)^2.$$

如果 $r=2$, 则

$$f(x_1,\ldots,x_n)=y_1^2+y_2^2=(y_1-\sqrt{-1}y_2)(y_1+\sqrt{-1}y_2).$$

把 $y_1=q_{1,1}x_1+\cdots+q_{1,n}x_n$ 和 $y_2=q_{2,1}x_1+\cdots+q_{2,n}x_n$ 带入上式得到 f 的因式分解.