

第一章 空间与形式

9 实二次型

在本节中, V 是 $\mathbb{R}$ 上的 n 维线性空间, V 上所有二次型的集合记为 $\mathcal{Q}(V)$.

9.1 惯性定理

定理 9.1 (*Sylvester*) 设 q 是 V 上的二次型. 则存在 q 的一组规范基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 使得在该基下 q 的矩阵为

$$\begin{pmatrix} E_k & O & O \\ O & -E_\ell & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

且 $k + \ell = \text{rank}(q)$. 进而, 如果 q 在另一组规范基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} E_s & O & O \\ O & -E_t & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

则 $s = k$ 和 $t = \ell$.

证明. 设 $r = \text{rank}(q)$. 由上一节推论 7.17 及其证明可知, 存在 q 的一组基使得 q 在该基下的矩阵是

$$A = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0),$$

其中 $r = \text{rank}(q)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. 适当调整基底中元素的顺序, 我们可进一步设

$$\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}^+, \quad \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_{k+\ell} \in \mathbb{R}^-, \quad \text{且} \quad k + \ell = r.$$

令 P 为 n 阶可逆矩阵

$$\text{diag} \left((\sqrt{\lambda_1})^{-1}, \dots, (\sqrt{\lambda_k})^{-1}, (\sqrt{-\lambda_{k+1}})^{-1}, \dots, (\sqrt{-\lambda_{k+\ell}})^{-1}, 1, \dots, 1 \right).$$

则

$$P^t A P = \begin{pmatrix} E_k & O & O \\ O & -E_\ell & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

设 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 和 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n$ 是两组 q 的规范基, 所对应的矩阵分别是

$$B = \begin{pmatrix} E_k & O & O \\ O & -E_\ell & O \\ O & O & O \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad C = \begin{pmatrix} E_s & O & O \\ O & -E_t & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

设 $\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1 + \dots + x_n \mathbf{e}_n = y_1 \epsilon_1 + \dots + y_n \epsilon_n$. 则

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_r^2 = y_1^2 + \dots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \dots - y_r^2.$$

假设 $k > s$. 则 $\ell < t$. 这是因为 $k + \ell = s + t = r$. 令

$U = \langle \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k \rangle$, $W = \langle \epsilon_{s+1}, \dots, \epsilon_n \rangle$. 则

$$\dim(U \cap W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W) \geq k + n - s - n = k - s > 0.$$

于是由非零向量 $\mathbf{v} \in U \cap W$. 由 U 和 W 的生成元可知, 存在 $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$, 不全为零, 和 $\beta_{s+1}, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$ 使得

$$\mathbf{v} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \dots + \alpha_k \mathbf{e}_k = \beta_{s+1} \epsilon_{s+1} + \dots + \beta_n \epsilon_n.$$

于是

$$q(\mathbf{v}) = \alpha_1^2 + \dots + \alpha_k^2 > 0 \quad \text{且} \quad q(\mathbf{v}) = -\beta_{s+1}^2 - \dots - \beta_n^2 \leq 0.$$

矛盾. $\square$

利用上述定理中的记号, 我们有如下定义.

定义 9.2 称 k 是 q 的正惯性指数, ℓ 是 q 的负惯性指数, (k, ℓ) 是 q 的签名.

上述定理的矩阵版如下.

推论 9.3 设 $A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$. 则存在 $k, \ell \in \mathbb{N}$ 使得

$$A \sim_c \begin{pmatrix} E_k & O & O \\ O & -E_\ell & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

且 $k + \ell = \text{rank}(q)$. 进而, 如果

$$A \sim_c \begin{pmatrix} E_s & O & O \\ O & -E_t & O \\ O & O & O \end{pmatrix}$$

则 $k = s$ 和 $t = \ell$.

利用上述推论中的记号, 我们由如下定义.

定义 9.4 称 k 是 A 的正惯性指数, ℓ 是 A 的负惯性指数, (k, ℓ) 是 A 的签名.

推论 9.5 设 $A, B \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$. 则 $A \sim_c B$ 当且仅当 A 和 B 有共同的签名.

证明. 设 A 的签名是 (k, ℓ) , B 的签名是 (s, t) .

如果 $A \sim_c B$, 则由 $\sim_c$ 的传递律和对称律得出

$$A \sim_c \begin{pmatrix} E_k & O & O \\ O & -E_\ell & O \\ O & O & O \end{pmatrix} \implies B \sim_c \begin{pmatrix} E_k & O & O \\ O & -E_\ell & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

根据推论 9.3, (k, ℓ) 也是 B 的签名.

反之, 设 $(k, \ell) = (s, t)$. 则

$$A \sim_c \begin{pmatrix} E_k & O & O \\ O & -E_\ell & O \\ O & O & O \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad B \sim_c \begin{pmatrix} E_k & O & O \\ O & -E_\ell & O \\ O & O & O \end{pmatrix}.$$

因为 $\sim_c$ 是等价关系, 所以 $A \sim_c B$. $\square$

例 9.6 设

$$\begin{aligned} q : \text{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto \text{tr}(A^2). \end{aligned}$$

证明 q 是二次型并求其签名.

证明. 设 $A = (a_{i,j})$. 则

$$q(A) = \text{tr}(A^2) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j} a_{j,i} = \sum_{i=1}^n a_{i,i}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2a_{i,j} a_{j,i}.$$

于是, q 是二次型. 考虑可逆坐标变换

$$z_{i,i} = a_{i,i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad \text{和} \quad a_{i,j} = z_{i,j} + z_{j,i}, \quad a_{j,i} = z_{i,j} - z_{j,i},$$

其中 $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}, i < j$. 则

$$q = \sum_{i=1}^n z_{i,i}^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq n} 2(z_{i,j}^2 - z_{j,i}^2).$$

于是, q 的正惯性指数是

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

而负惯性指数是

$$\frac{n(n-1)}{2}.$$

从而 q 的签名为

$$\left(\frac{n(n+1)}{2}, \frac{n(n-1)}{2} \right)$$

9.2 (半) 正定二次型

定义 9.7 设 q 是 V 上的二次型.

- (i) 如果对于任意 $\mathbf{x} \in V$, $q(\mathbf{x}) \geq 0$, 则称 q 是半正定的 (*semi-positive definite*);
- (ii) 如果对于任意 $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, $q(\mathbf{x}) > 0$, 则称 q 是正定的 (*positive definite*);
- (iii) 如果对于任意 $\mathbf{x} \in V$, $q(\mathbf{x}) \leq 0$, 则称 q 是半负定的 (*semi-negative definite*);
- (iv) 如果对于任意 $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, $q(\mathbf{x}) < 0$, 则称 q 是负定的 (*negative definite*);
- (v) 如果 q 既不是半正定也不是半负定的, 则称 q 是不定的 (*indefinite*).

设 $A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$, q_A 是 $\mathbb{R}^n$ 上在标准基下矩阵为 A 的二次型. 如果 q_A 是半正定(正定的, 半负定的, 负定的, 不定的), 则称 A 是半正定(正定的, 半负定的, 负定的, 不定的).

命题 9.8 设 $\dim(V) = n$ 且 q 是 V 上的二次型. 它的签名是 (k, ℓ) .

- (i) q 是半正定的当且仅当 $\ell = 0$;
- (ii) q 是正定的当且仅当 $k = n$;
- (iii) q 是半负定的当且仅当 $k = 0$;

(iv) q 是负定的当且仅当 $\ell = n$;

(v) q 是不定的当且仅当 $k > 0$ 且 $\ell > 0$.

证明. 设 q 在规范基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的规范型是

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{k+\ell}^2,$$

其中 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$ 是 V 中的任意向量.

(i) 若 $\ell = 0$, 则 $q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \dots + x_k^2 \geq 0$. 即 q 半正定. 反之, 假设 $\ell > 0$. 令 $\mathbf{x} = \mathbf{e}_{k+1}$. 则 $q(\mathbf{x}) = -1 < 0$. 矛盾. 故 $\ell = 0$.

(ii) 若 $k = n$, 则 $q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \dots + x_n^2$. 于是, 当 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ 时, $q(\mathbf{x}) > 0$, 即 q 正定. 反之, 假设 $k < n$. 令 $\mathbf{x} = \mathbf{e}_n$. 则 $q(\mathbf{e}_n) = 0$. 于是 q 不是正定的. 矛盾.

(iii) 与 (i) 类似.

(iv) 与 (ii) 类似.

(v) 排除 (i), (iii) 情形即可. $\square$

注解 9.9 半正定, 正定, 半负定, 负定和不定二次型分别有下列规范型

$$x_1^2 + \dots + x_k^2, \quad x_1^2 + \dots + x_n^2, \quad -x_1^2 - \dots - x_\ell^2, \quad -x_1^2 - \dots - x_n^2,$$

和

$$x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{k+\ell}^2,$$

在最后的规范型中 $k > 0, \ell > 0$.

类似地, 我们有

命题 9.10 设 $A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$. 它的签名是 (k, ℓ) .

- (i) A 是半正定的当且仅当 $\ell = 0$;
- (ii) A 是正定的当且仅当 $k = n$;
- (iii) A 是半负定的当且仅当 $k = 0$;
- (iv) A 是负定的当且仅当 $\ell = n$;
- (v) A 是不定的当且仅当 $k > 0$ 且 $\ell > 0$.

例 9.11 证明 $(a) \in \text{M}_1(\mathbb{R})$ 是正定的当且仅当 $a > 0$. 判定

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

是不是正定的.

证明. 矩阵 (a) 对应 $\mathbb{R}$ 上的二次型 $q(x) = ax^2$. 而 q 正定当且仅当 $a > 0$.

利用行列相伴变换可得

$$A \sim_c \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \implies A \text{ 的签名是 } (1, 1).$$

于是 A 是不定的.

例 9.12 设 $p, q \in \mathcal{Q}(V)$ 是半正定的. 证明 $p + q$ 也是半正定的; 若上述 p, q 中还有一个是正定的, 则 $p + q$ 也是正定的.

证明. 设 p, q 是半正定的. 则对任意的 $\mathbf{x} \in V$, $p(\mathbf{x}) \geq 0$, $q(\mathbf{x}) \geq 0$. 于是

$$(p + q)(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}) \geq 0.$$

再设 p 是正定的. 则对于任意的 $\mathbf{x} \in V \setminus \{\mathbf{0}\}$, $p(\mathbf{x}) > 0$. 于是

$$(p + q)(\mathbf{x}) = p(\mathbf{x}) + q(\mathbf{x}) > 0. \quad \square$$

类似地可证明下列结论.

注解 9.13 设 $A, B \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$ 是半正定的, 则 $A + B$ 也是半正定的; 进一步设 A, B 中还有一个是正定的, 则 $A + B$ 也是正定的.

设 $q \in \mathcal{Q}(V)$. 定义

$$C_q = \{\mathbf{v} \in V \mid q(\mathbf{v}) = 0\}.$$

称 C_q 为 q 确定的锥面(cone).

例 9.14 设 $q \in \mathcal{Q}(V)$. 证明 C_q 是 V 的子空间当且仅当 q 是半正定或半负定的.

证明. 设 q 的签名是 (k, ℓ) .

设 C_q 是 V 中的子空间. 如果 $k > 0$ 且 $\ell > 0$. 根据惯性定理 q 在 V 的某组基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的规范型是 $q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 + \dots + x_{k+\ell}^2$, 其中 $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_k\mathbf{e}_k + x_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \dots + x_n\mathbf{e}_n$. 于是 $q(\mathbf{e}_k + \mathbf{e}_{k+1}) = 1 - 1 = 0$ 且 $q(\mathbf{e}_k - \mathbf{e}_{k+1}) = 0$. 由此可知

$$\mathbf{e}_k + \mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{e}_k - \mathbf{e}_{k+1} \in C_q \implies 2\mathbf{e}_k \in C_q \implies q(2\mathbf{e}_k) = 0 \implies 4 = 0.$$

矛盾. 于是 $k = 0$ 或 $\ell = 0$. 即 q 是半负定或半正定的.

反之, 不妨设 q 是半正定的. 根据惯性定理 q 在 V 的某组基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ 下的规范型是

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2 + \dots + x_k^2.$$

设 $U = \langle \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$. 则 $U \subset C_q$. 设 $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + \dots + v_n\mathbf{e}_n \in C_q$. 则

$$q(\mathbf{v}) = v_1^2 + \dots + v_k^2 = 0.$$

因为 $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}$, 所以 $v_1 = \dots = v_k = 0$. 于是

$$\mathbf{v} = v_{k+1}\mathbf{e}_{k+1} + \dots + v_n\mathbf{e}_n \in U,$$

即 $C_q \subset U$. 综上所述, $U = C_q$. $\square$

9.3 (半) 正定矩阵的等价条件

实数域的一个基本性质是: 设 $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$. 则

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 \geq 0; \quad x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0 \implies x_1 = \dots = x_n = 0.$$

这个性质的矩阵版如下: 设

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \mathbf{x}^t \mathbf{x} \geq 0; \quad \mathbf{x}^t \mathbf{x} = 0 \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

引理 9.15 设 $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. 则 $A^t A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$, 半正定且 $\text{rank}(A^t A) = \text{rank}(A)$.

证明. 计算 $(A^t A)^t = A^t (A^t)^t = A^t A$ 得出 $A^t A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$.

设 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{y} = A\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. 则

$$\mathbf{x}^t (A^t A) \mathbf{x} = \mathbf{y}^t \mathbf{y} \geq 0.$$

故 $A^t A$ 半正定.

设 U, V 是分别是以 A 和 $A^t A$ 为系数的齐次线性方程组的解空间. 则 $U \subset V$. 反之, 设 $\mathbf{x} \in V$. 则

$$A^t A \mathbf{x} = \mathbf{0}_n \in \mathbb{R}^n.$$

于是, $\mathbf{y}^t \mathbf{y} = 0$. 由此得出 $\mathbf{y} = \mathbf{0}_m \in \mathbb{R}^m$, 即 $\mathbf{x} \in U$. 由此得出 $U = V$. 特别地, $\dim(U) = \dim(V)$. 由方程组版的对偶定理, $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^t A)$. $\square$

定理 9.16 设 $A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$. 则

(i) A 半正定当且仅当存在 $B \in \text{M}_n(\mathbb{R})$ 使得 $A = B^t B$.

(ii) A 正定当且仅当存在 $B \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得 $A = B^t B$.

证明. (i) 设 A 半正定. 则由矩阵版的惯性定理存在 $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得

$$P^t A P = \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

其中 $r = \text{rank}(A)$, 也是 A 的正惯性指数. 于是

$$A = (P^{-1})^t \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} P^{-1} = (P^{-1})^t \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix}}_B P^{-1} = B^t B.$$

反之, 根据引理 9.15, $A = B^t B$ 是半正定的.

(ii) 设 A 正定. 则由矩阵版的惯性定理存在 $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ 使得 $P^t A P = E_n$. 于是, $A = (P^{-1})^t P^{-1}$. 反之, 根据引理 9.15, $A = B^t B$ 是半正定的. 因为 B 可逆, 所以 A 满秩. 于是, A 的正惯性指数等于 n . $\square$

例 9.17 设 A 是正定矩阵. 证明 $\det(A) > 0$ 且 A^{-1} 也正定.

证明. 由上述定理 (ii), $A = P^t P$, 其中 $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$. 则 $\det(A) = \det(P)^2 > 0$, 且

$$A^{-1} = (P^t P)^{-1} = P^{-1} (P^t)^{-1} = P^{-1} (P^{-1})^t.$$

再由上述定理 (ii), A^{-1} 正定. $\square$

9.4 Jacobi 公式与正定矩阵

设 $A \in M_n(F)$. 矩阵 A 的子式

$$M \begin{pmatrix} i_1, i_2, \dots, i_k \\ i_1, i_2, \dots, i_k \end{pmatrix},$$

其中 $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$, 称为 A 的一个 k 阶主子式. 特别地,

$$M \begin{pmatrix} 1, 2, \dots, k \\ 1, 2, \dots, k \end{pmatrix}$$

称为 A 的 k 阶顺序主子式.

例 9.18 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}.$$

矩阵 A 的顺序主子式是 $a_{1,1}$, $\det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$ 和 $\det(A)$.

定理 9.19 (*Jacobi 公式*) 设 $A \in \text{SM}_n(F)$. 设 $\Delta_0 = 1$, Δ_i 是 A 的 i 阶顺序主子式. 如果 $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ 都非零, 则

$$A \sim_c \text{diag} \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \right).$$

证明. 设 $A = (a_{i,j})_{n \times n}$. 对 n 归纳. 当 $n = 1$ 时, $a_{1,1} = \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}\right)$. 结论成立. 设 $n > 1$ 且 $n - 1$ 时结论成立. 设 B 是由 A 的前 $(n - 1)$ 行和 $(n - 1)$ 列元素组成的子矩阵. 则 B 对称且它的 $n - 1$ 个顺序主子式是 $\Delta_1, \dots, \Delta_{n-1}$. 由归纳假设可知

$$B \sim_c \underbrace{\text{diag} \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \dots, \frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}} \right)}_C.$$

于是存在 $P \in \text{GL}_{n-1}(F)$ 使得 $P^t B P = C$. 令

$$Q = \begin{pmatrix} P & O_{(n-1) \times 1} \\ O_{1 \times (n-1)} & 1 \end{pmatrix} \quad \text{和} \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{n-1,n} \end{pmatrix}.$$

则

$$\begin{aligned} Q^t A Q &= \begin{pmatrix} P^t & O_{(n-1) \times 1} \\ O_{1 \times (n-1)} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^t & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P & O_{(n-1) \times 1} \\ O_{1 \times (n-1)} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C & \mathbf{w} \\ \mathbf{w}^t & a_{n,n} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{w} = P^t \mathbf{v}$. 对 $Q^t A Q$ 用初等行伴列变换并注意到 C 对称, 我们得到

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} E_{n-1} & O_{(n-1) \times 1} \\ -\mathbf{w}^t (C^{-1})^t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C & \mathbf{w} \\ \mathbf{w}^t & a_{n,n} \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} E_{n-1} & -C^{-1} \mathbf{w} \\ O_{1 \times (n-1)} & 1 \end{pmatrix}}_R \\
&= \begin{pmatrix} C & \mathbf{w} \\ O_{1 \times (n-1)} & \lambda \end{pmatrix} R, \quad \text{其中 } \lambda \text{ 是 } F \text{ 中某个元素,} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} C & O_{(n-1) \times 1} \\ O_{1 \times (n-1)} & \alpha \end{pmatrix}}_M, \quad \text{其中 } \alpha \text{ 是 } F \text{ 中某个元素.}
\end{aligned}$$

最后, 我们来验证 $\alpha = \Delta_n / \Delta_{n-1}$. 由上述推导得出

$$C = P^t B P \quad \text{和} \quad M = R^t Q^t A Q R.$$

因为 $\det(C) = \Delta_{n-1} = \det(B)$, 所以由上述第一个等式蕴含 $\det(P)^2 = 1$. 而上述第二个等式蕴含

$$\Delta_{n-1} \alpha = \Delta_n \det(P)^2 \implies \alpha = \Delta_n / \Delta_{n-1}. \quad \square$$

定理 9.20 设 $A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$. 设 Δ_k 是 A 的 k 阶顺序主子式, $k = 1, 2, \dots, n$. 则下列命题等价.

- (i) A 正定;
- (ii) A 的任何 k 阶主子式都大于零;

(iii) $\Delta_1 > 0, \dots, \Delta_n > 0$.

证明. (i) $\implies$ (ii) 设 B 是由 A 中第 $i_1, \dots, i_k$ 行和 $i_1, \dots, i_k$ 列构成的子矩阵. 其中 $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$. 令 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, 对任意 $j \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$, 第 j 个坐标等于零, 第 i_ℓ 个坐标等于 x_{i_ℓ} , $\ell = 1, 2, \dots, k$. 再令 $\mathbf{y} = (x_{i_1}, \dots, x_{i_k})^t$. 假设 $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}_k$. 则 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_n$. 于是

$$0 < \mathbf{x}^t A \mathbf{x} = \mathbf{y}^t B \mathbf{y}.$$

由 $\mathbf{y}$ 的任意性可知, B 正定. 根据上例, $\det(B) > 0$.

(ii) $\implies$ (iii) 显然.

(iii) $\implies$ (i) 由 Jacobi 公式,

$$A \sim_c \text{diag} \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \right),$$

其中 $\Delta_0 = 1$. 于是 A 合同于一个对角矩阵, 其对角线上的元素都是正实数. 于是 A 的正惯性指数等于 n . $\square$

例 9.21 设

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -1 & 1 \\ -1 & \lambda & -1 \\ 1 & -1 & \lambda \end{pmatrix}$$

问 λ 为何值时 A 是正定的, A 是负定的?

解. A 的三个顺序主子式分别是

$$\Delta_1 = \lambda, \quad \Delta_2 = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1, \quad \Delta_3 = \det(A) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

A 正定当且仅当 $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$ 且 $\Delta_3 > 0$. 即 $\lambda > 1$.

A 负定当且仅当 $-A$ 正定. 而 $-A$ 的三个主子式是

$$\Omega_1 = -\lambda, \quad \Omega_2 = \lambda^2 - 1, \quad \Omega_3 = \det(A) = -(\lambda - 1)^2(\lambda + 2).$$

A 负定当且仅当 $\Omega_1 > 0$, $\Omega_2 > 0$ 且 $\Omega_3 > 0$. 即 $\lambda < -2$.

9.5 Hadamard 不等式

例 9.22 设 $A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$ 正定. 证明 $\det(A)$ 不大于 A 的对角线上元素之积.

证明. 设 $A = (a_{i,j})$. 对 n 归纳. 当 $n = 1$ 时, $A = (a_{1,1})$. 于是 $\det(A) = a_{1,1}$. 结论成立. 设 $n > 1$ 且 $n - 1$ 时结论成立. 把 A 分块为

$$A = \begin{pmatrix} A_{n-1} & \mathbf{v} \\ \mathbf{v}^t & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

由定理 9.20 (i) $\implies$ (ii) 的证明可知, A_{n-1} 正定. 于是 $\det(A_{n-1}) \leq a_{1,1} \cdots a_{n-1,n-1}$. 令

$$P = \begin{pmatrix} E_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\mathbf{v} \\ O_{1 \times (n-1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

则

$$P^t A P = \begin{pmatrix} A_{n-1} & O_{(n-1) \times 1} \\ O_{1 \times (n-1)} & a_{n,n} - \underbrace{\mathbf{v}^t A_{n-1}^{-1} \mathbf{v}}_{\alpha} \end{pmatrix}.$$

因为 $\det(P) = 1$, 所以上式两边取行列式得

$$\det(A) = \det(A_{n-1})(a_{n,n} - \alpha).$$

因为 A_{n-1} 正定, 所以 A_{n-1}^{-1} 正定(见例 9.17). 于是 $\alpha \geq 0$.

由上式和归纳假设得

$$\det(A) \leq a_{1,1} \cdots a_{n-1,n-1} a_{n,n}. \quad \square$$

例 9.23 (*Hadamard* 不等式) 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$. 证明:

$$|\det(A)| \leq \sqrt{\prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{i,j}^2} \quad \text{和} \quad |\det(A)| \leq \sqrt{\prod_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{j,i}^2}.$$

证明. 不妨设 $A \in GL_n(\mathbb{R})$. 令 $M = A^t A$. 由定理 9.16 (ii) 可知 M 正定. 设 $M = (m_{i,j})$. 则由上例得到

$$\det(M) \leq m_{1,1} \cdots m_{n,n}.$$

注意到

$$m_{i,i} = \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2.$$

所以

$$\det(A)^2 = \det(M) \leq \prod_{i=1}^n m_{i,i} = \prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{j,i}^2.$$

由此证明了第二个不等式. 令 $M = AA^t$. 我们可以证明第一个不等式. $\square$