中国科学院大学

试 题 专 用 纸

课程编号：B01GB001Y-B02

课程名称：线性代数I-B (期末A卷)

任课教师：李子明、李文桥、张英瑞

注意事项：

1. 考试时间为180 分钟，考试方式闭卷；
2. 全部答案写在答题纸上；
3. 考试结束后，请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

1. (10分) 设有限域 $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$, 线性映射 $\phi : \mathbb{Z}_3^4 \to \mathbb{Z}_3^3$ 由

$$\phi(\mathbf{e}_1) = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3,\ \phi(\mathbf{e}_2) = \bar{2}\epsilon_1,\ \phi(\mathbf{e}_3) = \epsilon_1 + \bar{2}\epsilon_2,\ \phi(\mathbf{e}_4) = \epsilon_1 + \bar{2}\epsilon_3$$

确定, 其中 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$ 是 $\mathbb{Z}_3^4$ 的标准基, $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 是 $\mathbb{Z}_3^3$ 的标准基. 计算

(i) 线性映射 ϕ 在上述标准基下的矩阵,

(ii) $\mathrm{im}(\phi)$ 的维数 和 $\ker(\phi)$ 的一组基.

解. *(i)* 矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix}.$$

(ii) 直接计算得:

$$A \to \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \end{pmatrix}.$$

故 $\mathrm{rank}(A) = 3$. 于是, $\dim(\mathrm{im}(\phi)) = 3$. 根据对偶定理, $\dim(\ker(\phi)) = 1$. 求解以 A 为系数矩阵的齐次线性方程组得到 $\ker(\phi)$ 的一组基 $(\bar{1}, \bar{0}, \bar{1}, \bar{1})^t$. □

2. (10分) 设实矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(i) 计算 A^{-1}.

(ii) 设 $f(x) = x^2 - 2$. 计算 $f(A)$.

解. *(i)* 直接计算得:

$$(A|E) \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

故

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

(ii) 直接计算得:

$$f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - 2E = A. \quad \square$$

3. (10分) 设环 $\mathbb{Z}_{15} = \{\bar{i} \mid i = 0, 1, \ldots, 14\}$.

(i) 计算 $\bar{2}$ 和 $\bar{3}$ 在加法群 $(\mathbb{Z}_{15}, +, \bar{0})$ 中的阶.

(ii) 设 $(U, \cdot, \bar{1})$ 是 $\mathbb{Z}_{15}$ 中关于乘法的可逆元构成的群. 判断 $\bar{2}$ 和 $\bar{3}$ 是否在 U 中. 如果在, 求其在 U 中的阶.

解. *(i)* 直接计算得 $\mathrm{ord}(\bar{2}) = 15$ 和 $\mathrm{ord}(\bar{3}) = 5$.

(ii) 因为 $3|15$, 所以 $\bar{3} \notin U$. 因为 $\gcd(2, 15) = 1$, 所以 $\bar{2} \in U$. 直接计算得 $\mathrm{ord}(\bar{2}) = 4$. $\square$

4. (10分) 设 F 是域, $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3 \in F^n$, 其中 $n \geq 3$.

   (i) 证明: 如果 $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3+\mathbf{v}_1$ 线性无关, 则 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 线性无关.

   (ii) 如果 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 线性无关, 能否推出 $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3+\mathbf{v}_1$ 线性无关? 请说明理由.

解. *(i)* 设 $U = \langle \mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3+\mathbf{v}_1 \rangle$ 和 $V = \langle \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3 \rangle$. 则 $U \subset V$. 因为 $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3+\mathbf{v}_1$ 线性无关, 所以 $\dim(U) = 3$. 故 $\dim(V) = 3$. 则 $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_3$ 线性无关.

(ii) 不能. 例如当 $F = \mathbb{Z}_2$ 时,

$$(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)+(\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3)+(\mathbf{v}_3+\mathbf{v}_1) = \bar{2}\mathbf{v}_1+\bar{2}\mathbf{v}_2+\bar{2}\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

故 $\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3$ 和 $\mathbf{v}_3+\mathbf{v}_1$ 线性相关. □

5. (10分) 证明 n 阶行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3^{n+1} - 2^{n+1}.$$

直接计算得: $D_1 = 5 = 3^2 - 2^2$ 和 $D_2 = 25 - 6 = 19 = 3^3 - 2^3$. 故 $n = 1, 2$ 时结论成立. 设 $n > 2$ 且当 $1 \leq k \leq n-1$ 时结论成立. 考虑 n 时,

$$D_n = 5D_{n-1} - 6D_{n-2} \quad (\text{按第一列展开}).$$

由归纳假设可知

$$\begin{aligned} D_n &= 5\left(3^n - 2^n\right) - 6\left(3^{n-1} - 2^{n-1}\right) \\ &= 3^{n+1} + 2 \times 3^n - 2 \times 3^n - 2^{n+1} - 3 \times 2^n + 3 \times 2^n \\ &= 3^{n+1} - 2^{n+1} \quad \square \end{aligned}$$

6. (10分) 设 $(G, \cdot, e)$ 是群, H 是 G 的非空子集. 证明:

 (i) 如果对任意的 $h_1, h_2 \in H$ 都有 $h_1 h_2^{-1} \in H$, 则 H 是子群;

 (ii) 如果 H 是有限集且对任意的 $h_1, h_2 \in H$ 都有 $h_1 h_2 \in H$, 则 H 是子群.

证明. *(i)* 设 $h \in H$. 则 $hh^{-1} \in H$. 故 $e \in H$. 因为 $e \in H$, 所以 $eh^{-1} \in H$. 故 $h^{-1} \in H$. 设 $h_1, h_2 \in H$. 由上述推理可得 $h_2^{-1} \in H$. 故

$$h_1 \left(h_2^{-1}\right)^{-1} \in H \Rightarrow h_1 h_2 \in H.$$

由此看出, H 含有单位元, H 中每个元素在 H 中有逆元, 且 H 关于 G 上的运算封闭. 故 H 是 G 的子群.

(ii) 设 $H = \{h_1, \ldots, h_n\}$. 由乘法的封闭性可知, $h_1 H \subset H$. 因为左平移是单射, 所以 $\operatorname{card}(h_1 H) = n$. 故 $h_1 H = H$. 于是, 存在 $h \in H$ 使得 $h_1 h = h_1$. 由消去律可知, $h = e$. 故 $e \in H$. 由此进一步推出, 存在 $h' \in H$ 使得 $h_1 h' = e$. 故 $h_1^{-1} \in H$. 由选取 h_1 的任意性可知, H 中每个元素在 H 中都可逆. 因此, H 是 G 的子群. $\square$

(ii) 的另证. 设 $h \in H$. 则 $\{h^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\} \subset H$ *($\because$ H 对乘法封闭)*. 因为 H 有限, 所以存在 $i, j \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $i > j$ 且 $h^i = h^j$. 故 $h^{i-j} = e \in H$. 进而, $h^{-1} = h^{i-j-1} \in H$. 故 H 是子群. $\square$

7. (10分) 设 F 是域, $A \in \mathrm{M}_n(F)$ 是非零方阵.

 (i) 证明: 存在多项式 $f \in F[t] \setminus F$ 使得 $f(A) = O$.

 (ii) 设 (i) 中多项式 f 的次数是 d. 证明: $F[A] = \left\{\sum_{k=0}^{d-1} \alpha_k A^k \mid \alpha_k \in F\right\}$.

证明. *(i)* 因为集合 $\mathrm{M}_n(F)$ 中的矩阵可以看成 F^{n^2} 中的向量, 所以存在

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n^2} \in F,$$

不全为零, 使得 $\sum_{i=0}^{n^2} \alpha_i A^i = O$. 令 $f(t) = \sum_{i=0}^{n^2} \alpha_i t^i$. 则 $f \in F[t]$ 且 $f \neq 0$. 我们有 $f(A) = O$. 再因为 $A^0 = E$, 所以 $f \notin F$.

(i) 的另证. 设 $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_d$ 是 F 中待定元素. 则

$$\alpha_d A^d + \cdots + \alpha_1 A + \alpha_0 E = O$$

等价于一个关于 $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_d$ 的齐次线性方程组. 该方程组共有 n^2 个方程和 $d+1$ 个未知数. 故当 $d > n^2 - 1$ 时该方程组有非平凡解. 即存在非零多项式 $f = \sum_{i=0}^{d} \alpha_i x^i$ 使得 $f(A) = O$. 因为 $A^0 = E$, 所以 $f \notin F$.

(ii) 设 $B \in F[A]$. 则存在 $p \in F[t]$ 使得 $B = p(A)$. 由多项式除法可知

$$p(t) = q(t)f(t) + r(t),$$

其中 $q, r \in F[t]$ 且 $\deg(r) < d$. 因为用 A 取代 t 是环同态, 所以

$$p(A) = q(A)f(A) + r(A) = r(A).$$

故 $B = r(A)$. $\square$

8. (10分) 设 F 是域, $A \in \mathrm{M}_n(F)$. 证明:

$$n + \mathrm{rank}(A^2 - A) = \mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(E - A), \quad \text{其中 } E \text{ 代表 } n \text{ 阶方阵.}$$

证明. 设 $M = \begin{pmatrix} A & O \\ O & E-A \end{pmatrix}$. 利用分块矩阵的初等变换得

$$M \xrightarrow{\text{左乘}\begin{pmatrix} E & O \\ E & E \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} A & O \\ A & E-A \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{右乘}\begin{pmatrix} E & E \\ O & E \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} A & A \\ A & E \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{左乘}\begin{pmatrix} E & -A \\ O & E \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} A-A^2 & O \\ A & E \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{右乘}\begin{pmatrix} E & O \\ -A & E \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} A-A^2 & O \\ O & E \end{pmatrix} =: N$$

因为左乘或右乘的矩阵都是可逆矩阵, 所以 $\mathrm{rank}(M) = \mathrm{rank}(N)$. 从而,

$$\mathrm{rank}(A) + \mathrm{rank}(E - A) = n + \mathrm{rank}(A^2 - A). \quad \square$$

另证. 设 V_A, V_{E-A} 和 V_{A-A^2} 分别是相应矩阵对应的齐次线性方程组的解空间. 根据对偶定理, 上述秩的等式等价于

$$\dim\left(V_{A-A^2}\right) = \dim\left(V_A\right) + \dim\left(V_{E-A}\right). \tag{1}$$

断言*:* $V_{A-A^2} = V_A + V_{E-A}$.

断言的证明*:* 因为 $A - A^2 = (A - E)A = A(A - E)$, 所以 $V_A \subset V_{A-A^2}$ 且 $V_{E-A} \subset V_{A-A^2}$. 由此得出 $V_A + V_{E-A} \subset V_{A-A^2}$. 设 $\mathbf{v} \in V_{A-A^2}$. 注意到

$$\mathbf{v} = A\mathbf{v} + (E - A)(\mathbf{v}),\ A\mathbf{v} \in V_{E-A},\ (E - A)\mathbf{v} \in V_A.$$

故 $\mathbf{v} \in V_A + V_{E-A}$. 由此可得 $V_{A-A^2} \subset V_A + V_{E-A}$. 断言成立.

根据断言, $\dim(V_{A-A^2}) = \dim(V_A + V_{E-A})$. 根据维数公式, 我们有

$$\dim(V_{A-A^2}) = \dim(V_A) + \dim(V_{E-A}) - \dim(V_A \cap V_{E-A}).$$

设 $\mathbf{v} \in V_A \cap V_{E-A}$. 则 $A\mathbf{v} = (E-A)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. 故 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.. 即 $V_A \cap V_{E-A} = \{\mathbf{0}\}$. 由此可知, (1) 成立. □

9. (10分) 设 F 是域, 矩阵 $A \in F^{m\times n}, B \in F^{n\times k}$. 证明:

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(AB) \iff \exists\, C \in F^{k\times n} \text{ 使得 } A = ABC.$$

证明. "$\Longleftarrow$". 一方面, 因为 $A = ABC$, 所以 $\operatorname{rank}(AB) \geq \operatorname{rank}(A)$. 另一方面, $\operatorname{rank}(A) \geq \operatorname{rank}(AB)$. 故 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(AB)$.

"$\Longrightarrow$". 注意到矩阵乘法的定义蕴含 AB 的列空间是 A 的列空间的子空间. 因为 $\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(AB)$, 所以这两个列空间相同. 故 A 的列都是 AB 的列的线性组合.

设 $AB = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)$. 则对任意 $j \in \{1, \ldots, n\}$, 存在 $c_{1,j}, \ldots, c_{k,j} \in F$ 使得 $\vec{A}^{(j)} = c_{1,j}\mathbf{v}_1 + \cdots + c_{k,j}\mathbf{v}_k$. 令 $C = (c_{i,j})_{k\times n}$ 得 $A = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k)C = ABC$. □

10. (10分) 设 F 是域, 矩阵 $A, B \in \mathrm{M}_n(F)$ 且 $AB = BA$. 证明:

(i) 如果 A 可逆, 则 $A^{-1}B = BA^{-1}$;

(ii) 无论 A 是否可逆, $A^\vee B = BA^\vee$ 都成立, 其中 $A^\vee$ 代表 A 的伴随矩阵.

证明. *(i)* 直接计算得

$$AB = BA \Rightarrow A^{-1}AB = A^{-1}BA \Rightarrow B = A^{-1}BA \Rightarrow BA^{-1} = A^{-1}B.$$

(ii) 设 $M = xE + A$, 其中 x 是 F 上的未定元. 则 M 是域 $F(x)$ 上的矩阵. 因为 $M|_{x=0} = A$, 所以 $M^\vee|_{x=0} = A^\vee$ ($\because$ 多项式赋值是同态). 因为 $\det(M)$ 是关于 x 的 n 次多项式, 所以 M 可逆. 又因为 $AB = BA$, 所以 $MB = BM$. 由 *(i)* 可知, $M^{-1}B = BM^{-1}$. 故 $|M|^{-1}M^\vee B = B|M|^{-1}M^\vee$. 由此得到 $M^\vee B = BM^\vee$. 因为 $M^\vee B$ 和 $BM^\vee$ 中的元素都是 x 的多项式, 所以

$$(M^\vee B)|_{x=0} = (BM^\vee)|_{x=0} \Rightarrow (M^\vee|_{x=0})\, B = B\,(M^\vee|_{x=0}) \Rightarrow A^\vee B = BA^\vee,$$

其中 $\Rightarrow$ 是因为多项式赋值是同态. □