中国科学院大学

试 题 专 用 纸

课程编号：B01GB001Y-B02

课程名称：线性代数I-B (期中试卷)

任课教师：李子明、李文桥、张英瑞

注意事项：

1. 考试时间为120 分钟，考试方式闭卷；
2. 全部答案写在答题纸上；
3. 考试结束后，请将本试卷和答题纸、草稿纸一并交回。

1. (15分) 设置换 $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 8 & 1 & 7 & 6 & 4 & 5 & 2 & 3 & 10 & 9 \end{pmatrix}$.

(i) 把 σ 写成互不相交的循环之积.

(ii) 计算 σ 的阶.

(iii) 确定 σ 的奇偶性.

解.

(i) $\sigma = (18372)(465)(9\underline{10})$.

(ii) $\mathrm{ord}(\sigma) = \mathrm{lcm}(5,3,2) = 30$.

(iii) $\epsilon_\sigma = (-1)^{4+2+1} = -1$. 奇置换. □

2. (15分) 设 $S = \{(m,n) \mid m,n \in \mathbb{Z} 且 n \neq 0\}$. 对于 $(k,\ell),(m,n) \in S$, 如果 $kn = m\ell$, 则我们称 (k,ℓ) 和 (m,n) 有关系 $\sim$, 记为 $(k,\ell) \sim (m,n)$.

(i) 验证 $\sim$ 是 S 上的等价关系.

(ii) 设 $(m,n) \in S$, $m \neq 0$ 且 $\gcd(m,n) = 1$. 证明:

$$\overline{(m,n)} = \{(um,un) \mid u \in \mathbb{Z}, u \neq 0\},$$

其中 $\overline{(m,n)}$ 代表 (m,n) 关于 $\sim$ 的等价类.

解.

(i) 对任意 $(m,n)\in S$, $mn=nm$. 故 $(m,n)\sim(m,n)$. 自反律成立.

设 $(m,n),(k,\ell)\in S$ 且 $(m,n)\sim(k,\ell)$. 则 $m\ell=nk$. 由整数乘法的交换性可知 $(k,\ell)\sim(m,n)$. 对称律成立.

再设 $(p,q)\in S$, $(m,n)\sim(k,\ell)$ 和 $(k,\ell)\sim(p,q)$. 则 $m\ell=nk$ 和 $kq=\ell p$. 故 $m\ell q=nkq$. 从而 $m\ell q=n\ell p$. 因为 $\ell\neq 0$, 所以 $mq=np$. 故 $(m,n)\sim(p,q)$. 传递律成立.

(ii) 因为 $(m,n)\sim(um,un)$, 所以 $\{(um,un)\mid u\in\mathbb{Z},u\neq 0\}\subset\overline{(m,n)}$.

反之, 设 $(k,\ell)\in\overline{(m,n)}$. 则 $m\ell=kn$. 故 $m\ell$ 是 m 和 n 的公倍数. 因为 $\gcd(m,n)=1$, 所以 $mn=\operatorname{lcm}(m,n)$. 于是, 存在 $u\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ 使得 $m\ell=umn$. 故 $\ell=un$. 由此得出, $mun=kn$. 故 $k=um$. 从而 $(k,\ell)=(um,un)$. 我们有 $\overline{(m,n)}\subset\{(um,un)\mid u\in\mathbb{Z},u\neq 0\}$.

综上, $\overline{(m,n)}=\{(um,un)\mid u\in\mathbb{Z},u\neq 0\}$. $\square$

3. (15分) 设齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1-x_2+x_3+x_5=0\\ x_1+x_3+x_4=0\\ 5x_1-3x_2+5x_3+2x_4+3x_5=0\end{cases}$. 它的系数矩阵记为 A, 解空间记为 V.

(i) 写出 A.

(ii) 计算 V 的维数和一组基.

(iii) 判断以 $\begin{pmatrix} & \mid 1\\ A & \mid 1\\ & \mid 1\end{pmatrix}$ 为增广矩阵的线性方程组是否相容.

解.

(i)

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 5 & -3 & 5 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

(ii) 由初等行变换得

$$A\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 0 & 2 & -2\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

故 $\mathrm{rank}(A)=2$. 由对偶定理得 $\dim(V)=3$. 解空间 V 得一组基是

$$(0,1,0,0,1)^t,(1,-1,0,1,0)^t,(1,0,-1,0,0)^t.$$

(iii) 由初等行变换得

$$\begin{pmatrix} & \mid 1 \\ A & \mid 1 \\ & \mid 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

故对应得方程组不相容. □

4. (15分) 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 2 & -2 & 5 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix} \quad 和 \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

计算:

(i) $A+B$, AB 和 BA;

(ii) $\mathrm{rank}(A+B)$, $\mathrm{rank}(AB)$ 和 $\mathrm{rank}(BA)$.

解.

(i) 直接计算

$$A+B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & -2 & 6 \\ 3 & -3 & 6 \end{pmatrix}, AB=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}, BA=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 3 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(ii) 利用初等行变换

$$A+B \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -3 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathrm{rank}(A+B)=3.$$

直接观察得

$$\mathrm{rank}(AB)=1.$$

利用初等行变换

$$BA \to \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 6-15/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \mathrm{rank}(BA)=2. \quad \square$$

5. (10分) 设 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \mathbb{R}^n$. 证明: $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1$ 线性无关当且仅当 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 线性无关.

证: 设 $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3$ 和 $\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_1$.

设 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ 线性无关. 因为 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$, 所以

$$\dim\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle \geq 3.$$

故 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 线性无关.

反之, 设 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 线性无关. 注意到

$$\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3,\ \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1,\ \mathbf{w}_3 - \mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2.$$

故 $\mathbf{v}_1 = (1/2)(\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3), \mathbf{v}_2 = (1/2)(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 - \mathbf{w}_3), \mathbf{v}_3 = (1/2)(\mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_3 - \mathbf{w}_1)$. 于是, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle$. 因为 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ 线性无关, 所以上述关于维数得推理可得 $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$ 线性无关. □

6. (10分) 设 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一组基, 其中 $n > 1$. 设子空间

$$V_i = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

(i) 证明 $V_1 \cap V_2$ 的维数是 $n-2$.

(ii) 设 $n > 2$. 计算子空间 $V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n$ 的维数, 并说明理由.

证明: 由定义可知, $\dim(V_i) = n-1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

(i) 注意到 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \in V_1 + V_2$. 故 $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^n$. 利用维数公式得

$$\dim(V_1 \cap V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 + V_2) = n - 1 + n - 1 - n = n - 2.$$

(ii) 我们利用数学归纳法证明: $\dim(V_1 \cap \cdots \cap V_i) = n - i$. 当 $i = 2$ 时, 结论由 *(i)* 可知. 设 $i > 2$ 且结论对 $i-1$ 成立. 则

$$\dim(V_1 \cap \cdots \cap V_{i-1} \cap V_i) = \dim(V_1 \cap \cdots \cap V_{i-1}) + \dim(V_i) - \dim(V_1 \cap \cdots \cap V_{i-1} + V_i).$$

由 $V_1, \ldots, V_{i-1}$ 的定义可知, $\mathbf{v}_i \in V_1 \cap \cdots \cap V_{i-1}$, 再由 V_i 的定义可知,

$$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V_1 \cap \cdots \cap V_{i-1} + V_i \Rightarrow V_1 \cap \cdots \cap V_{i-1} + V_i = \mathbb{R}^n \Rightarrow \dim(V_1 \cap \cdots \cap V_{i-1} + V_i) = n.$$

于是, $\dim(V_1 \cap \cdots \cap V_{i-1} \cap V_i) = n - (i-1) + n - 1 - n = n - i$. 由此可知, $\dim(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n) = 0$. □

(ii) 的另证. 设 $\mathbf{v} \in V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n$. 则 $\mathbf{v}$ 是 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ 的线性组合. 于是, $\mathbf{v}$ 在基底 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ 下的第 i 个坐标等于 0. 因为 i 是 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 中任意元素, 所以 $\mathbf{v}$ 在基底 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ 下的任何坐标等于 0. 故 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$. 由此得出

$$V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n = \{\mathbf{0}\} \Longrightarrow \dim(V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n) = 0.$$

7. (10分) 设矩阵 $A, B \in \mathbb{R}^{m \times n}$ 和 $C = (A, B) \in \mathbb{R}^{m \times 2n}$. 证明:

(i) $\operatorname{rank}(A + B) \le \operatorname{rank}(C)$;

(ii) 如果 $\operatorname{rank}(A + B) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B)$, 则 $\operatorname{rank}(A + B) = \operatorname{rank}(C)$.

证明.

(i) 注意到

$$V_c(A+B) = \langle \vec{A}^{(1)} + \vec{B}^{(1)}, \ldots, \vec{A}^{(n)} + \vec{B}^{(n)} \rangle \subset \langle \vec{A}^{(1)} \ldots, \vec{A}^{(n)}, \vec{B}^{(1)}, \ldots, \vec{B}^{(n)} \rangle = V_c(C).$$

故 $\operatorname{rank}(A + B) = \dim V_c(A + B) \le \dim V_c(C) = \operatorname{rank}(C)$.

(ii) 因为 $V_c(C) = V_c(A) + V_c(B)$, 所以 $\dim V_c(C) \le \dim V_c(A) + \dim V_c(B)$. 故

$$\operatorname{rank}(C) \le \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B).$$

由 *(i)* 可知 $\operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) \le \operatorname{rank}(C)$. 故

$$\operatorname{rank}(C) = \operatorname{rank}(A) + \operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(A + B). \quad \square$$

8. (10分) 设 $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 是线性映射. 证明:

(i) $\ker(\phi) \subset \ker(\phi^2)$, 其中 $\phi^2 = \phi \circ \phi$;

(ii) $\ker(\phi) = \ker(\phi^2)$ 当且仅当 $\ker(\phi) \cap \operatorname{im}(\phi) = \{\mathbf{0}_n\}$.

证明:

(i) 设 $\mathbf{v} \in \ker(\phi)$. 则 $\phi(\mathbf{v}) = \mathbf{0}_n$. 于是

$$\phi^2(\mathbf{v}) = \phi(\phi(\mathbf{v})) = \phi(\mathbf{0}_n) = \mathbf{0}_n.$$

故 $\mathbf{v} \in \ker(\phi^2)$, 即 $\ker(\phi) \subset \ker(\phi^2)$.

(ii) 设 $\ker(\phi) = \ker(\phi^2)$ 和 $\mathbf{x} \in \ker(\phi) \cap \mathrm{im}(\phi)$. 因为 $\mathbf{x} \in \mathrm{im}(\phi)$, 所以存在 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{y})$. 因为 $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$, 所以 $\phi^2(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$, 即 $\mathbf{y} \in \ker(\phi^2)$. 因为 $\ker(\phi) = \ker(\phi^2)$, 所以 $\mathbf{y} \in \ker(\phi)$. 由此得出

$$\mathbf{x} = \phi(\mathbf{y}) = \mathbf{0}_n \implies \ker(\phi) \cap \mathrm{im}(\phi) = \{\mathbf{0}_n\}.$$

反之, 设 $\ker(\phi) \cap \mathrm{im}(\phi) = \{\mathbf{0}_n\}$ 且 $\mathbf{x} \in \ker(\phi^2)$. 则 $\phi(\mathbf{x}) \in \ker(\phi) \cap \mathrm{im}(\phi)$. 故 $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. 由此可知, $\mathbf{x} \in \ker(\phi)$. 故 $\ker(\phi^2) \subset \ker(\phi)$. 再根据 *(i)*, 我们有 $\ker(\phi) = \ker(\phi^2)$. $\square$