

第九题作地

1. 设: $V = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) < 4\}$. 再设:

$$\sigma: V \longrightarrow V \quad \text{和} \quad \Delta: V \longrightarrow V$$

$$p(x) \mapsto p(x+h) \quad \text{和} \quad p(x) \mapsto p(x+h) - p(x),$$

其中, h 是某个固定的实数.

- (i) 证明: σ 和 Δ 是 V 上的线性算子.
- (ii) 计算: σ 和 Δ 在基底 $1, x, x^2, x^3$ 下的矩阵.
- (iii) 计算 $\ker(\sigma)$ 和 $\ker(\Delta)$ 的维数.

证: (i) 易证.

$$(i) \quad \sigma(1) = 1 \quad \sigma(x) = x+h \quad \sigma(x^2) = (x+h)^2 = x^2 + 2hx + h^2$$

$$\sigma(x^3) = (x+h)^3 = x^3 + 3x^2h + 3h^2x + h^3$$

$$\Delta(1) = 1-1=0 \quad \Delta(x) = x+h-x=h \quad \Delta(x^2) = (x+h)^2 - x^2 = 2hx + h^2$$

$$\Delta(x^3) = (x+h)^3 - x^3 = 3x^2h + 3h^2x + h^3$$

$$\text{所以 } \sigma(1, x, x^2, x^3) = (1, x, x^2, x^3) \begin{pmatrix} 1 & h & h^2 & h^3 \\ 0 & 1 & 2h & 3h^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A

$$\Delta(1, x, x^2, x^3) = (1, x, x^2, x^3) \begin{pmatrix} 0 & h & h^2 & h^3 \\ 0 & 0 & 2h & 3h^2 \\ 0 & 0 & 0 & 3h \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

B

$$(iii) \quad \dim(\ker \sigma) + \dim(\text{im } \sigma) = \dim V = 4, \quad \because \dim(\text{im } \sigma) = 4, \quad \text{所以 } \dim(\ker \sigma) = 0$$

$$\text{同理 } \dim(\ker \Delta) + \dim(\text{im } \Delta) = 4 \quad \begin{cases} \text{当 } h=0 \text{ 时 } \forall p \in V, \Delta(p)=0, \dim(\text{im } \Delta)=0 \\ \text{当 } h \neq 0 \text{ 时 } \dim(\text{im } \Delta)=3, \dim(\ker \Delta)=1 \end{cases}$$

3. 设 $\mathbb{R}^2$ 的线性算子 A 在基 $\alpha_1 = (1, 0)^t, \alpha_2 = (0, -1)^t$ 下的矩阵是 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$,

线性算子 B 在基 $\beta_1 = (0, 1)^t, \beta_2 = (1, 1)^t$ 下的矩阵是 $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$. 求线性算子

$A+B, AB$ 和 BA 在基 β_1, β_2 下的矩阵.

解: 先求 A 在基 β_1, β_2 下的矩阵.

设从基 $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ 到 $\{\beta_1, \beta_2\}$ 的过渡矩阵为 $P \in GL_2(\mathbb{R})$

$$\text{则 } (\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1, \alpha_2) \cdot P$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot P$$

$$\Rightarrow P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A \text{ 在基 } \beta_1, \beta_2 \text{ 下的矩阵为 } P^{-1} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} P = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 & -11 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}}_{A'}$$

$$\text{则 } A+B = \begin{pmatrix} -3 & -8 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}, \quad A'B = \begin{pmatrix} -26 & -89 \\ 7 & 24 \end{pmatrix}, \quad BA' = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

□

4. 设 $\dim V = n, A$ 为 V 上的线性算子. 证明下列等价:

(i) $A \in \langle \mathcal{E}_V \rangle$ (恒同算子 $\mathcal{E}_V$ 在 $\mathcal{L}(V)$ 中生成的线性子空间).

(ii) $\forall B \in \mathcal{L}(V), AB = BA$.

(iii) A 在任意基下的矩阵都相同.

证: 由 $\mathcal{L}(V) \cong M_n(F)$, (i), (ii), (iii) 等价

$$(i) A \in \langle E_n \rangle$$

$$(ii) \forall B \in M_n(F), AB = BA$$

$$(iii) \forall P \in GL_n(F) \quad P^{-1}AP = A, \text{ i.e. } AP = PA.$$

$$(i) \Rightarrow (ii) \text{ 设 } A = \lambda E_n, \lambda \in F \text{ 则 } AB = \lambda E_n B = \lambda B = B \cdot \lambda E_n$$

$$(ii) \Rightarrow (iii) \text{ 显然}$$

$$(iii) \Rightarrow (i) \text{ 取 } F_{ij} = E_n + E_{ij} \text{ 则 } \det(F_{ij}) = 1, \text{ 从而 } F_{ij} \in GL_n(F)$$

$$\text{由 } A \cdot F_{ij} = F_{ij} \cdot A \Rightarrow A(E_n + E_{ij}) = (E_n + E_{ij}) \cdot A$$

$$\Rightarrow A + AE_{ij} = A + E_{ij} \cdot A$$

$$\Rightarrow A \cdot E_{ij} = E_{ij} \cdot A$$

$$\text{比如取 } i=1, j=2 \quad A \cdot E_{12} = \begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ 0 & a_{22} & & \\ & a_{31} & & \\ & \vdots & & \\ & a_{n1} & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad E_{12} \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第2列}}$$

$$A \cdot E_{12} = E_{12} \cdot A \Rightarrow a_{11} = a_{22} \text{ 且 } a_{i1} = a_{2j} = 0 \quad \forall i \neq 1, j \neq 2$$

$$\text{同理当取 } i \in \{1, \dots, n\} \quad j \in \{1, \dots, n\} \text{ 时, 由 (ii) 有 } a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn}$$

$$a_{ij} = 0 \quad \forall i \neq j. \text{ 所以 } A \in \langle E_n \rangle. \quad \square$$

第十题作地.

$$1. \text{ 设 } A \in \mathcal{L}(V) \text{ 满足 } A^2 = 2A - E,$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{且 } f = t^2 - 2 \in F[t].$$

$$(a) \text{ 计算 } \alpha, \beta \in F \text{ 使得 } f(A) = \alpha A + \beta E;$$

$$(b) \text{ 计算 } f(B) \text{ 和 } \mu(B).$$

解: (a) $f(A) = A^2 - 2I = 2A - I - 2I = 2A - 3I$

$\alpha = 2 \quad \beta = -1$

(b) $f(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 - 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

易知 $(B - I)^2 = 0$ 所以 $\mu(B) \mid (t-1)^2$

又因为 B 不是数量矩阵, 所以 $\deg(\mu(B)) \neq 1 \Rightarrow \mu(B) = (t-1)^2$.

2. 设

$$J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} J_2 & O \\ O & O \end{pmatrix}_{4 \times 4}, \quad B = \begin{pmatrix} J_2 & O \\ O & E_2 \end{pmatrix}_{4 \times 4}, \quad C = \begin{pmatrix} J_2 & O \\ O & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}_{4 \times 4}.$$

计算 μ_A, μ_B 和 μ_C .

解 $J_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 所以 $\mu_{J_2} \mid t^2$ 又因为 J_2 不是数量矩阵

所以 $\mu_{J_2} = t^2$.

引理 4.7 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$, U_1, U_2 是非平凡 $\mathcal{A}$ -子空间, 且 $V = U_1 \oplus U_2$. 设 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{d_1}$ 是 U_1 的基, $\delta_1, \dots, \delta_{d_2}$ 是 U_2 的基. 则在 V 的基底 $\epsilon_1, \dots, \epsilon_{d_1}, \delta_1, \dots, \delta_{d_2}$ 下 $\mathcal{A}$ 的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix},$$

其中 $A_i \in M_{d_i}(F)$ 是 $\mathcal{A}|_{U_i}$ 在对应基下的矩阵, $i = 1, 2$. 进而 $\mu_A = \text{lcm}(\mu_{A|_{U_1}}, \mu_{A|_{U_2}})$ (取首一的最小公倍式).

$\mu_A = \text{lcm}(\mu_{J_2}, \mu_O) = \text{lcm}(t^2, t) = t^2$

$\mu_B = \text{lcm}(\mu_{J_2}, \mu_{E_2}) = \text{lcm}(t^2, t-1) = t^2(t-1)$

$\mu_{(C)} = \text{lcm}(t-2, t) = t(t-2)$

$\mu_C = \text{lcm}(\mu_{J_2}, \mu_{(C)}) = \text{lcm}(t^2, t(t-2)) = t^2(t-2). \quad \square$

3. 设 $A \in \mathcal{L}(V)$. 证明: 如果 $V_1, \dots, V_m$ 是 A 不变子空间, 那么这些子空间的和与交都是 A 的不变子空间.

解: $\forall x \in V_1 + V_2 + \dots + V_m$

$$\exists x_1 \in V_1, \dots, x_m \in V_m \quad \text{s.t.} \quad x = x_1 + \dots + x_m$$

$$A(x) = A(x_1 + x_2 + \dots + x_m) = A(x_1) + \dots + A(x_m)$$

因为 V_i 是 A -子空间, 所以 $A(x_i) \in V_i$

$\Rightarrow A(x) \in V_1 + \dots + V_m \Rightarrow$ 和是 A 不变子空间

$$\forall x \in V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_m$$

$$\text{则 } x \in V_i, \quad 1 \leq i \leq m, \quad A(x) \in V_i, \quad 1 \leq i \leq m$$

$$\Rightarrow A(x) \in V_1 \cap V_2 \cap \dots \cap V_m$$

$\Rightarrow$ 交是 A 不变子空间. $\square$

4. 设 $A \in \mathcal{L}(V)$ 满足 $A^2 = 2A + 3E$. 证明: 当 F 的特征不等于 2 时,

$$\text{rank}(A + E) + \text{rank}(A - 3E) = \dim(V).$$

当 F 的特征等于 2 时, 上述结论是否成立? 请说明理由.

证: 当 F 的特征不等于 2 时

$$A^2 - 2A - 3E = 0 \Rightarrow (A - 3E)(A + E) = 0$$

A 满足 $f(t) = (t-3)(t+1) = 0$, 则 $\text{gcd}(t^2, t+1) = 1$, 由

$$\text{根据分解定理知 } V = \ker(A - 3E) \oplus \ker(A + E)$$

$$\Rightarrow \dim(V) = \dim(\ker(A - 3E)) + \dim(\ker(A + E))$$

$$\Rightarrow \dim(V) = \dim(V) - \text{rank}(A - 3E) + \dim(V) - \text{rank}(A + E)$$

$$\Rightarrow \dim(V) = \text{rank}(A - 3E) + \text{rank}(A + E).$$

$$\text{当 } A = E \text{ 时 } A^2 = 2A + 3E \Rightarrow A^2 = E$$

$$\text{取 } A = E \text{ 则 } A + E = E + E = 0$$

$$A - 3E = E - 3E = -2E = 0$$

$$\Rightarrow \text{rank}(A + E) = 0 \quad \text{rank}(A - 3E) = 0$$

$$\text{rank}(A + E) + \text{rank}(A - 3E) = 0$$

只要 $\dim(V) \neq 0$, 上式就不成立 $\square$

期中复习

第一章: 空间形式

1. 线性空间的定义

2. 基底和维数: 如何判断 $v_1, \dots, v_n$ 是有限维线性空间 V 的基底?

① $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ 且 V 中任意元素至 $v_1, \dots, v_n$ 下表示唯一

② $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ 且 $v_1, \dots, v_n$ 线性无关.

③ $V = \langle v_1, \dots, v_n \rangle$ 且 $n = \dim V$.

④ $v_1, \dots, v_n$ 线性无关 且 $n = \dim V$ (i.e. $\{v_1, \dots, v_n\}$ 为极大线性无关组)

3. 子空间的定义: $W \subseteq V$ 非空, W 是 V 的子空间 $\Leftrightarrow \forall \alpha, \beta \in F, x, y \in W$
 $\alpha x + \beta y \in W$.

例: V_1, V_2 是 V 的子空间, $V_1 \cap V_2, V_1 + V_2$ 是 V 的子空间.

$V_1 \cup V_2$ 是 V 的子空间 $\Leftrightarrow V_1 \subseteq V_2$ 或 $V_2 \subseteq V_1$

② 维数公式: $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$

③ 对偶定理: $\phi: V \rightarrow W$ 的线性映射, 则

$$\dim(\ker \phi) + \dim(\operatorname{im} \phi) = \dim V.$$

矩阵版本: $A \in F^{m \times n}$, $\dim(\operatorname{sol}(A)) + \operatorname{rank}(A) = n$.

ϕ 直和: $V_1, \dots, V_k$ 是 V 的子空间, 以下讨论条件.

①: $W = V_1 + V_2 + \dots + V_k$ 是直和, 即对 $\forall w \in W$, 存在唯一的 $v_i \in V_i$ ($1 \leq i \leq k$), s.t. $w = v_1 + v_2 + \dots + v_k$.

② 对 $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$

$$V_i \cap \{V_1 + \dots + V_{i-1} + V_{i+1} + \dots + V_k\} = \{0\}.$$

③ 若 $0 = v_1 + v_2 + \dots + v_k$, $v_i \in V_i$, 则 $v_1 = v_2 = \dots = v_k = 0$.

④. $\dim(V_1) + \dots + \dim(V_k) = \dim(W)$

5. 线性映射, $\phi: V \rightarrow W$

① ϕ 是单射 $\Leftrightarrow \ker \phi = \{0\}$

② ϕ 是满射 $\Leftrightarrow \operatorname{im} \phi = W$.

6. 线性映射基本定理二:

设 $v_1, \dots, v_n$ 是 V 的一组基, $w_1, \dots, w_n$ 是 W 中任意 n 个元素, 则存在唯一的线性映射 ϕ , s.t. $\phi(v_i) = w_i$, $i=1, \dots, n$.

该定理有两层含义: ① 存在性, $w_1, \dots, w_n$ 可以是 W 中任意元素

② 唯一性: 基 $v_1, \dots, v_n$ 的像唯一确定了 ϕ .

7. 坐标变换: 设 $e_1, \dots, e_n$ 是 V 的一组基, 则 $\forall v \in V$, $\exists$ 唯一的

$$x_1, \dots, x_n \text{ s.t. } v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n = (e_1, \dots, e_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

则 $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 称为 v 的坐标.

设 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 是 V 的另一组基, 则存在可逆矩阵 $P \in GL_n(F)$ 且

$$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = (e_1, \dots, e_n)P$$

问: 若已知 $v = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$, 怎么求 v 在 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 下的坐标?

$$\begin{aligned} \text{设 } v = y_1 \varepsilon_1 + \dots + y_n \varepsilon_n &= (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= (e_1, \dots, e_n) \cdot P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \square$$

8. 双线性型:

① 定义: $f: V \times V \rightarrow F$

$$\forall \alpha, \beta \in F, x, y, z \in V \quad f(\alpha x + \beta y, z) = \alpha f(x, z) + \beta f(y, z)$$

$$f(x, \alpha y + \beta z) = \alpha f(x, y) + \beta f(x, z)$$

② 双线性型在一组基下的矩阵:

设 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 是 V 的一组基, f 是 V 上的双线性型, 则 $\exists$ 唯一 $A \in M_n(F)$

且 $\forall \vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n \quad \vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + \dots + y_n \vec{e}_n$ 有

$$f(\vec{x}, \vec{y}) = (x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ 其中 } A = (f(\vec{e}_i, \vec{e}_j))_{n \times n}$$

③ 双线性型在不同基下的矩阵:

设 $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = (e_1, \dots, e_n)P$ 是 V 的另一组基, 则 f 在

$\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵为 $\boxed{P^t A P}$ (合同于 A).

9. 对称双线性型: $f(x, y) = f(y, x) \Leftrightarrow f$ 在基下的矩阵是对称矩阵.

定理. 设 F 的特征不为 2, 则任意的对称双线性型 f , 存在 V 的一组基, 使 f 在这组基下的矩阵为对角矩阵.

矩阵版本: $\forall$ 对称矩阵 A , $\exists P \in GL_n(F)$ 使 $P^T A P$ 为对角.

问题: 给定对称矩阵 $A \in SM_n(\mathbb{R})$ 是否存在 $P \in GL_n(\mathbb{R})$ 使 $P^T A P$ 为对角矩阵.

行列相伴消元.

9. 二次型:

定义: $q: V \rightarrow F$

(1.1) $\forall v \in V, q(v) = q(-v)$, (1.2) $\forall x, y \in V, f(x, y) = \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y))$

是 V 上对称双线性型, f 称为 q 的二次核.

② 二次型在标准型下的矩阵:

设 $q(x) = 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 + 6x_1x_3$

$$= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

③ 二次型的规范型和规范基. 计算方法: (见第6周作业3.)

a. 行列相伴消元

b. 配方法 (变量替换)

④ 实二次型: $A \in SM_n(\mathbb{R}), A \sim_c \begin{pmatrix} E_k & & \\ & -E_l & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

称 (k, l) 为 A 的签名.

二次型版本: 设 q 是实二次型 则存在 q 的一组规范基, 使得 q 在该基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} E_k & & \\ & -E_l & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

即规范型为 $x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_{k+l}^2$

④ 二次型即类型: 正定, 负定, 半正定, 半负定, 不定.

a. 正定矩阵的等价描述: $A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$

b. $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \vec{x} \neq 0$, 有 $\vec{x}^t A \vec{x} > 0$

c. A 的符号为 $(n, 0)$

d. 存在可逆矩阵 P , 使得 $P^t A P = E_n$

e. 存在可逆矩阵 P , 使得 $A = P^t P$

f. A 的所有顺序主子式大于 0.

负定矩阵: A 是负定矩阵 $\Leftrightarrow -A$ 是正定矩阵.

半正定矩阵的等价描述: $A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$

(i) $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, 有 $\vec{x}^t A \vec{x} \geq 0$

(ii) A 的签名是 $(k, 0)$ $0 \leq k \leq n$

(iii) 存在可逆矩阵 P 使得 $P^t A P = \begin{pmatrix} E_k & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

(iv) 存在矩阵 $Q \in M_n(\mathbb{R})$, 使得 $A = Q^t Q$.

二. 线性映射与线性算子.

1. 线性算子定义.

2. 线性算子在基组基下的矩阵: 设 $\phi \in \text{Hom}(V, V)$

$e_1, \dots, e_n$ 是 V 的一组基, 则 $(\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)) = (e_1, \dots, e_n) \cdot A$

另一种证法: 设 $\vec{x} = x_1 e_1 + \dots + x_n e_n$ $\phi(\vec{x}) = \vec{y} = y_1 e_1 + \dots + y_n e_n$

$$\text{则 } \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

3. 线性映射在不同基下的矩阵

设 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 是 V 的另一组基且

$$(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = (e_1, \dots, e_n)P, \quad P \in GL_n(F)$$

则 A 在 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ 下的矩阵是 $P^{-1}AP$.

4. 极小多项式:

(i) 定义: $f \in F[t]$, $A \in L(V)$ 若 $f(A) = 0$ 则称 f 是 A 的零化多项式. A 的零化多项式中次数最小的称为 A 的极小多项式.

(ii) $P = \mu_A \iff$ 对 $\forall f \in F[t]$ 零化 A , $P|f$.

例 设 $A \in L(V)$, $\deg(\mu_A) = 1 \iff A$ 是数量算子.

$A \in L(V)$ 幂等算子, $\mu_A = 0$ 或 t 或 $t^2 - t$

$A \in L(V)$ 幂零算子 $\mu_A = t^k$

□