

1. 求下列实矩阵的所有特征值和特征向量:

$$(a) \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

1. 解: (a): 设 $A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$ 则 $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-5 & -7 & 5 \\ 0 & \lambda-4 & 1 \\ -2 & -8 & \lambda+3 \end{vmatrix}$

$$= t^3 - 6t^2 + 11t - 6 = (t-1)(t-2)(t-3)$$

特征值 $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3$

当特征值为1时, $(1 \cdot E - A)\vec{x} = \vec{0}$

$$\text{i.e.} \begin{pmatrix} -4 & -7 & 5 \\ 0 & -3 & 1 \\ -2 & -8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

解得令 $x_2=1$ 则 $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ 所以 $V^{\lambda_1} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$

当特征值为2时, $(2 \cdot E - A)\vec{x} = \vec{0}$

令 $x_2=1$, 解得 $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 所以 $V^{\lambda_2} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$

当特征值为3时, $(3 \cdot E - A)\vec{x} = \vec{0}$

令 $x_2=1$ 解得 $\vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 所以 $V^{\lambda_3} = \left\langle \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

(b) $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $|\lambda E - B| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -2 \\ -5 & \lambda+3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^3$

$$\Rightarrow \lambda = -1.$$

$$(-1E-A)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{令 } x_3 = 1, \text{ 则 } \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow V = \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

□

2. 设 λ_1, λ_2 是 n 阶方阵 A 的两个特征值, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 是分别属于 λ_1, λ_2 的特征向量, 问: $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ 是 A 的特征向量吗? 并说明原因.

引理: 属于不同特征值的特征向量是线性无关的.

证: 设 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 是 A 的特征值, 且 $V_1 \in V^{\lambda_1}, V_2 \in V^{\lambda_2}$, 则 $V_1 \neq 0$ 且 $V_2 \neq 0$
 则 $AV_1 = \lambda_1 V_1$ 且 $AV_2 = \lambda_2 V_2$

设 V_1, V_2 是线性相关的 即存在不全为 0 的 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 使 $\alpha V_1 + \beta V_2 = 0$

不妨设 $\alpha \neq 0$, 则 $V_1 = -\frac{\beta}{\alpha} V_2$ 则

$$\lambda_1 V_1 = A V_1 = A \left(-\frac{\beta}{\alpha} V_2 \right) = -\frac{\beta}{\alpha} \lambda_2 V_2 = \lambda_2 V_1$$

$$\Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) V_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 \rightarrow \infty \quad \square$$

证: $A\vec{x}_1 = \lambda_1 \vec{x}_1$ 且 $A\vec{x}_2 = \lambda_2 \vec{x}_2$ 则 $A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2$

若 $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ 是 A 的特征向量, 则存在 λ , 使 $A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \lambda(\vec{x}_1 + \vec{x}_2)$

$$\Rightarrow \lambda(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2$$

$$\Rightarrow (\lambda - \lambda_1) \vec{x}_1 + (\lambda - \lambda_2) \vec{x}_2 = \vec{0}$$

因为 $\vec{x}_1, \vec{x}_2$ 线性无关, 所以 $\lambda = \lambda_1$ 且 $\lambda = \lambda_2$

$$\text{反过来当 } \lambda_1 = \lambda_2 \text{ 时 } A(\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = A\vec{x}_1 + A\vec{x}_2 = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 \\ = \lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_1 \vec{x}_2 = \lambda_1 (\vec{x}_1 + \vec{x}_2)$$

$\Rightarrow \vec{x}_1 + \vec{x}_2$ 是 A 的特征向量。

所以 $\vec{x}_1 + \vec{x}_2$ 是 A 的特征向量 $\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$. 1]

3. 设 A 是有限维线性空间中的可逆线性算子. 证明:

(a) 0 不是 A 的特征值.

(b) 若 λ 是 A 的特征值, 则 λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值且对应的特征向量相同.

证: (a) 若 0 是 A 的特征值, 则存在非零特征向量 $\vec{v}$ s.t. $A\vec{v} = 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$

因为 A 可逆, $\therefore A^{-1}A\vec{v} = A^{-1}\vec{0} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0} \rightarrow \in$

(b) λ 是 A 的特征值, $\therefore \exists \vec{v} \neq \vec{0}$ s.t. $A\vec{v} = \lambda \vec{v}$

$$A^{-1}A\vec{v} = A^{-1}(\lambda \vec{v}) \Rightarrow \vec{v} = \lambda A^{-1}\vec{v}, \because \lambda \neq 0$$

$$\therefore \lambda^{-1}\vec{v} = A^{-1}\vec{v}$$

所以 λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值, 且 A 的特征向量是 A^{-1} 的特征向量.

反过来若 $\vec{x}$ 是 A^{-1} 的特征向量, 则 $A^{-1}\vec{x} = \lambda^{-1}\vec{x}$

$$\Rightarrow A A^{-1}\vec{x} = A(\lambda^{-1}\vec{x})$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \lambda^{-1} A\vec{x}$$

$$\Rightarrow \lambda \vec{x} = A\vec{x} \Rightarrow \vec{x} \text{ 也是 } A \text{ 的特征向量. } \square$$

4. 设 A 是有限维线性空间中的可逆线性算子, $f \in F[t]$. 证明: 若 λ_0 是 A 的一个特征值, 则 $f(\lambda_0)$ 为 $f(A)$ 的特征值; 若 $\vec{x}$ 是 A 关于 λ_0 的特征向量, 则 $\vec{x}$ 也是 $f(A)$ 关于 $f(\lambda_0)$ 的特征向量, 即

$$f(A)(\vec{x}) = f(\lambda_0)(\vec{x}).$$

证: 首先证 $\forall n \in \mathbb{N}^+$, $A^n \vec{x} = \lambda_0^n \vec{x}$.

归纳法: $n=1$ 时成立.

设 $n-1$ 时成立, i.e. $A^{n-1} \vec{x} = \lambda_0^{n-1} \vec{x}$.

$$\text{则 } A^n \vec{x} = A \cdot A^{n-1} \vec{x} = A(\lambda_0^{n-1} \vec{x}) = \lambda_0^{n-1} A \vec{x} = \lambda_0^{n-1} \lambda_0 \vec{x} = \lambda_0^n \vec{x}$$

设 $f(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0 \in \mathbb{R}[t]$

$$f(A) = a_n A^n + \dots + a_1 A + a_0, \text{ 从而}$$

$$f(A)\vec{x} = a_n A^n \vec{x} + \dots + a_1 A \vec{x} + a_0 \vec{x}$$

$$= a_n \lambda_0^n \vec{x} + \dots + a_1 \lambda_0 \vec{x} + a_0 \vec{x}$$

$$f(\lambda_0)(\vec{x}) = (a_n \lambda_0^n + \dots + a_1 \lambda_0 + a_0)(\vec{x})$$

$$= a_n \lambda_0^n \vec{x} + \dots + a_1 \lambda_0 \vec{x} + a_0 \vec{x} = f(A)\vec{x}$$

补充:

1. 设 $A, B \in M_n(E)$, 且 $AB=BA$, 证明:

(i) A 和 B 有公有的特征向量:

(ii) 存在 $P \in M_n(E)$ 使得 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 同时为 k -三角矩阵.

证: (i): 设 λ 是 A 的特征值, 则 $\forall \vec{v} \in V^\lambda$, 都有

$$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$$

$$\text{则 } AB\vec{v} = BA\vec{v} = B\lambda\vec{v} = \lambda B\vec{v}$$

i.e. $B\vec{v} \in V^\lambda$, 所以 V^λ 是 B -不变子空间.

这 B 是 B 对应的 V^λ 上映射, 则 $B|_{V^\lambda}: V^\lambda \rightarrow V^\lambda$

是 V^λ 上的线性算子.

设 μ 是 $B|_U$ 的特征值, 则 $\exists x \in V^\mu$ 使 $B|_U(x) = \mu x$.

所以 $x \in V^\lambda$ 即是 A 的特征向量又 $x \in V^\mu$ 是 B 的特征向量

(ii) 设 v 是 A 和 B 的公共特征向量, 将 v 扩充成 V 中的一组基.

记为 $\{v, v_2, \dots, v_n\}$.

则 A 在这组基下的矩阵为

$$A(v, v_2, \dots, v_n) = (v, v_2, \dots, v_n) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_A & * & * & * \\ \hline 0 & & & \end{array} \right)$$

其中 $C \in M_{n-1}(\mathbb{C})$

同时 B 在这组基下的矩阵为

$$B(v, v_2, \dots, v_n) = (v, v_2, \dots, v_n) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_B & * & * & * \\ \hline 0 & & & \end{array} \right)$$

$D \in M_{n-1}(\mathbb{C})$.

1) 归纳法: 对 n 进行归纳当 $n=1$ 时 $A=a$ $B=b$.

取 $P=I$ $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 本身为上三角矩阵

设 $\forall A, B \in M_{n-1}(\mathbb{C})$ 同时可同时对角化, i.e. 若 $AB=BA$

则 $\exists P \in GL_{n-1}(\mathbb{C})$ 使 $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 同时上三角化

当 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ 时, 如上所述.

$$A(v, v_2, \dots, v_n) = (v, v_2, \dots, v_n) \cdot \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_A & * & * & * \\ \hline 0 & & & \end{array} \right)$$

$$\text{则 } \exists P \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ 使 } P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|ccc} \lambda_A & * & * & * \\ \hline 0 & & & \end{array} \right)$$

从而 $P^{-1}BP = \left(\begin{array}{c|c} \frac{\lambda_B}{0} & \begin{smallmatrix} * & \cdots & * \\ \hline & D \end{smallmatrix} \end{array} \right)$

因 $AB=BA$ 所以 $(P^{-1}AP)(P^{-1}BP) = (P^{-1}BP)(P^{-1}AP)$
 $\Rightarrow C D = D C$

由引理假设 $\exists Q \in GL_n(\mathbb{C})$ 使 $Q^{-1}CQ$ 和 $Q^{-1}DQ$ 同时为上三角矩阵.

令 $Q' = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & Q_{n-k \times n-k} \end{pmatrix}$ 则 $(Q')^{-1}P^{-1}APQ' = (Q')^{-1} \left(\frac{\lambda_A}{0} \mid \begin{smallmatrix} * & \cdots & * \\ \hline & C \end{smallmatrix} \right) Q' = \left(\frac{\lambda_A}{0} \mid \begin{smallmatrix} * & \cdots & * \\ \hline & C \end{smallmatrix} \right) \rightarrow \text{上三角.}$

同时 $(Q')^{-1}P^{-1}BPQ' = (Q')^{-1} \left(\frac{\lambda_B}{0} \mid \begin{smallmatrix} * & \cdots & * \\ \hline & D \end{smallmatrix} \right) Q' = \left(\frac{\lambda_B}{0} \mid \begin{smallmatrix} * & \cdots & * \\ \hline & D \end{smallmatrix} \right) \rightarrow \text{上三角.}$

□

2. $A, B \in GL_n(\mathbb{C})$, 满足 $AB=BA$ 且 B 幂零, 则 $\chi_A(t) = \chi_{A+B}(t)$

Pf: $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ 使 $S = P^{-1}AP$ 和 $T = P^{-1}BP$ 同时为上三角矩阵.

B 幂零 $\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ 使 $B^m = 0$ 则 $T^m = P^{-1}B^mP = 0$

$$T = \begin{pmatrix} a_1 & & * \\ & a_2 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_n \end{pmatrix} \quad \forall m \in \mathbb{N}^+ \text{ 则 } T^m = \begin{pmatrix} a_1^m & & * \\ & a_2^m & \\ 0 & & \ddots \\ & & & a_n^m \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0 \text{ i.e. } T = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & 0 & \\ 0 & & \ddots \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

从而 $S+T$ 的 Jordan 块与 S 的 Jordan 块相同。

$$\Rightarrow \chi_{S+T}(t) = \chi_S(t)$$

$$\text{又因 } S+T = P^{-1}(A+B)P \quad S+T \sim A+B \quad \text{且} \quad S \sim A$$

$$\text{所以 } \chi_{A+B}(t) = \chi_A(t) \quad \square$$