

2025年春季学期第十一周作业

1. 求下列实矩阵的所有特征值和特征向量:

(a) $\begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

2. 设 λ_1, λ_2 是 n 阶方阵 A 的两个特征值, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 是分别属于 λ_1, λ_2 的特征向量, 问: $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ 是 A 的特征向量吗? 并说明原因.

3. 设 $\mathcal{A}$ 是有限维线性空间中的可逆线性算子. 证明:

(a) 0 不是 $\mathcal{A}$ 的特征值.

(b) 若 λ 是 $\mathcal{A}$ 的特征值, 则 λ^{-1} 是 $\mathcal{A}^{-1}$ 的特征值且对应的特征向量相同.

4. 设 $\mathcal{A}$ 是有限维线性空间中的可逆线性算子, $f \in F[t]$. 证明: 若 λ_0 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征值, 则 $f(\lambda_0)$ 为 $f(\mathcal{A})$ 的特征值; 若 $\mathbf{x}$ 是 $\mathcal{A}$ 关于 λ_0 的特征向量, 则 $\mathbf{x}$ 也是 $f(\mathcal{A})$ 关于 $f(\lambda_0)$ 的特征向量, 即

$$f(\mathcal{A})(\mathbf{x}) = f(\lambda_0)(\mathbf{x}).$$

1. 求下列实矩阵的所有特征值和特征向量:

$$(a) \begin{pmatrix} 5 & 7 & -5 \\ 0 & 4 & -1 \\ 2 & 8 & -3 \end{pmatrix}$$

$$(b) \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

解: (a) 设此矩阵为 A , 计算可得: $\chi_A(t) = \det(tE - A) = \begin{vmatrix} t-5 & -7 & 5 \\ 0 & t-4 & 1 \\ -2 & -8 & t+3 \end{vmatrix} = (t-1)(t-2)(t-3).$

于是, $\text{spec}_{\mathbb{R}}(A) = \{1, 2, 3\}.$

设特征根 $\lambda_1 = 1$, 解方程组.

$$(\lambda_1 E - A)X = \vec{0}$$

得特征向量 $\vec{v}_1 = (2, 1, 3)^t.$

特征根 $\lambda_2 = 2$, 特征向量 $\vec{v}_2 = (1, 1, 2)^t.$

特征根 $\lambda_3 = 3$, 特征向量 $\vec{v}_3 = (-1, 1, 1)^t.$

A 可对角化:

$$\text{令 } P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^n = \left(P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 3 \end{pmatrix} P^{-1} \right)^n = P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 2^n & \\ & & 3^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

(b) 设此矩阵为 B. 计算可得 $\chi_B(t) = \det(tE - B) = \begin{vmatrix} t-2 & 1 & -2 \\ -5 & t+3 & -3 \\ 1 & 0 & t+2 \end{vmatrix} = (\lambda+1)^3$

于是, $\text{spec}_{\mathbb{R}}(B) = \{-1\}$. 解方程组:

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ -5 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

可得特征向量为 $\vec{v} = (1, 1, -1)^t$.

B 不可对角化.

2. 设 λ_1, λ_2 是 n 阶方阵 A 的两个特征值, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ 是分别属于 λ_1, λ_2 的特征向量,
问: $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ 是 A 的特征向量吗? 并说明原因.

解: 当 $\lambda_1 = \lambda_2$ 时, 只要 $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$, 则 $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ 是 A 的特征向量.

当 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 时, $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ 不是 A 的特征向量.

$$A\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1, A\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}, \mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}.$$

若 $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ 是 A 的特征向量, 则 $\exists \lambda$ s.t. $A(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \lambda(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2$

$$\Rightarrow (\lambda - \lambda_1)\mathbf{x}_1 + (\lambda - \lambda_2)\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}. \quad (1)$$

其中 $\lambda - \lambda_1 \neq \lambda - \lambda_2$, 均非零

$$\text{等式左右两边左乘矩阵 } A \text{ 可得, } (\lambda - \lambda_1)\lambda_1\mathbf{x}_1 + (\lambda - \lambda_2)\lambda_2\mathbf{x}_2 = \mathbf{0} \quad (2)$$

$$(2) - \lambda_1(1): (\lambda - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$$

$$\because (\lambda - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0 \quad \therefore \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}, \text{ 进而代入(1)得 } \mathbf{x}_1 = \mathbf{0}. \rightarrow \Leftarrow$$

综合上述, $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ 不是 A 的特征向量.

属于不同特征值的特征向量线性无关. (设 $\mathbf{x}_1 = \alpha\mathbf{x}_2, \alpha \in \mathbb{R}^*$ 则 $A\mathbf{x}_1 = \lambda_1\alpha\mathbf{x}_2 = \lambda_2\alpha\mathbf{x}_2$.
 $\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2.$)

3. 设 $\mathcal{A}$ 是有限维线性空间中的可逆线性算子. 证明:

(a) 0 不是 $\mathcal{A}$ 的特征值.

(b) 若 λ 是 $\mathcal{A}$ 的特征值, 则 λ^{-1} 是 $\mathcal{A}^{-1}$ 的特征值且对应的特征向量相同.

证明: (a) 若 0 是 $\mathcal{A}$ 的特征值, 则存在非零向量 $\vec{v}$, 使得 $\mathcal{A}(\vec{v}) = \vec{0}$.

这与 $\mathcal{A}$ 是可逆线性算子矛盾. 故 0 不是 $\mathcal{A}$ 的特征值.

$\mathcal{A}$ 在基下的矩阵表示为 A .

0 是 A 的特征值 $\Leftrightarrow$ 0 是特征多项式 $|\lambda I - A| = 0$ 的根 $\Leftrightarrow |-A| = (-1)^n |A| = 0$

$\Leftrightarrow |A| = 0 \Leftrightarrow A$ 不可逆.

(b). 若 λ 是 $\mathcal{A}$ 的特征值, 则存在非零向量 $\vec{v}$ 使得 $\mathcal{A}(\vec{v}) = \lambda \vec{v}$ 且 $\lambda \neq 0$.

等式左右两边同时作用 $\mathcal{A}^{-1}$ 可得: $\mathcal{A}^{-1} \circ \mathcal{A}(\vec{v}) = \lambda \mathcal{A}^{-1}(\vec{v})$

$$\Rightarrow \mathcal{A}^{-1}(\vec{v}) = \lambda^{-1} \vec{v}$$

4. 设 $\mathcal{A}$ 是有限维线性空间中的可逆线性算子, $f \in F[t]$. 证明: 若 λ_0 是 $\mathcal{A}$ 的一个特征值, 则 $f(\lambda_0)$ 为 $f(\mathcal{A})$ 的特征值; 若 $\mathbf{x}$ 是 $\mathcal{A}$ 关于 λ_0 的特征向量, 则 $\mathbf{x}$ 也是 $f(\mathcal{A})$ 关于 $f(\lambda_0)$ 的特征向量, 即

$$f(\mathcal{A})(\mathbf{x}) = f(\lambda_0)(\mathbf{x}).$$

证明: 若 $\vec{x} \neq \vec{0}$ 是 $\mathcal{A}$ 关于 λ_0 的特征向量, 则 $\mathcal{A}(\vec{x}) = \lambda_0 \vec{x}$.

$$\text{设 } f(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0.$$

用数学归纳法证明: $\forall k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \mathcal{A}^k(\vec{x}) = \lambda_0^k \vec{x}$

$$\text{故 } f(\mathcal{A})(\vec{x}) = a_n \mathcal{A}^n(\vec{x}) + \dots + a_1 \mathcal{A}(\vec{x}) + a_0 \vec{x}$$

$$= (a_n \lambda_0^n + \dots + a_1 \lambda_0 + a_0) \vec{x}$$

$$= f(\lambda_0) \vec{x}$$

即 $\vec{x}$ 也是 $f(\mathcal{A})$ 关于 $f(\lambda_0)$ 的特征向量.

命题1: $A, B \in M_n(\mathbb{C})$, 若 $AB = BA$ 则 $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ s.t. $P^{-1}AP$ 和 $P^{-1}BP$ 均为上三角矩阵.

证明: 对 n 归纳, 当 $n=1$ 时, 结论显然成立.

设 $n > 1$ 且 $n-1$ 时结论成立.

考虑 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 把 A 看成 $\mathbb{C}^n$ 上在标准基 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 下矩阵等于 A 的线性算子.

A 有一个 1 维 A 子空间 $\langle \vec{u} \rangle$, $\exists \lambda_1 \in \mathbb{C}$ s.t. $A\vec{u} = \lambda_1 \vec{u}$.

$$A \cdot B\vec{u} = B \cdot A\vec{u} = \lambda_1 B\vec{u} \Rightarrow (A - \lambda_1 E) \cdot B\vec{u} = \vec{0}.$$

$\ker(A - \lambda_1 E)$ 是 B -不变子空间. 故 $\exists \vec{v} \in \ker(A - \lambda_1 E)$ s.t. $B\vec{v} = \lambda_1 \vec{v}$. 共享特征向量.

$$\text{因此, } \exists P_1 \in GL_n(\mathbb{C}) \text{ s.t. } \tilde{A} = P_1^{-1} A P_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0_{(n-1) \times 1} & A_1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = P_1^{-1} B P_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0_{(n-1) \times 1} & B_1 \end{pmatrix}$$

$$\because AB = BA \therefore \tilde{A} \tilde{B} = \tilde{B} \tilde{A}. \text{ 计算可得 } A_1 B_1 = B_1 A_1$$

根据归纳假设, $\exists P_2 \in GL_{n-1}(\mathbb{C})$ s.t. $P_2^{-1} A_1 P_2 = A_2$, $P_2^{-1} B_1 P_2 = B_2$ 均为上三角矩阵.

$$\text{取 } Q = \begin{pmatrix} 1 & 0_{1 \times (n-1)} \\ 0_{(n-1) \times 1} & P_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 Q^{-1}(P_1^{-1}AP_1)Q &= \begin{pmatrix} I & O_{1 \times (n-1)} \\ O_{(n-1) \times 1} & P_2^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O_{(n-1) \times 1} & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O_{1 \times (n-1)} \\ O_{(n-1) \times 1} & P_2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O_{(n-1) \times 1} & P_2^{-1}A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & O_{1 \times (n-1)} \\ O_{(n-1) \times 1} & P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O_{(n-1) \times 1} & A_2 \end{pmatrix} \\
 &= P_2^{-1}A_1P_2
 \end{aligned}$$

$$\text{同理 } Q^{-1}(P_1^{-1}BP_1)Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ O_{(n-1) \times 1} & B_2 \end{pmatrix}$$

取 $P = P_1Q$, 则满足条件.

如果是实数域, 则不能保证可同时三角化. e.g. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = E$. A 没有实特征值.

命题 2. $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ 可对角化, $AB=BA$. 求证: 存在同一个 n 阶可逆复方阵 P 使得 $P^{-1}AP$, $P^{-1}BP$ 同时为对角阵.

证明. 由于 A 可对角化, $\exists P_1 \in GL_n(\mathbb{C})$ st.

$$P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_t E_{n_t} \end{pmatrix} \text{ 其中 } \lambda_1, \dots, \lambda_t \text{ 是 } A \text{ 的不同特征值.}$$

设 $\tilde{A} := P_1^{-1}AP_1$, $\tilde{B} := P_1^{-1}BP_1$

$$\tilde{A} \cdot \tilde{B} = P_1^{-1}AP_1 \cdot P_1^{-1}BP_1 = P_1^{-1}ABP_1 = P_1^{-1}BAP_1 = \tilde{B} \cdot \tilde{A}.$$

把 $\tilde{B}$ 写成

$$\tilde{B} = (B_{ij})_{t \times t} = \begin{pmatrix} B_{11} & \cdots & B_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ B_{t1} & \cdots & B_{tt} \end{pmatrix}$$

比较等式 $\tilde{A}\tilde{B} = \tilde{B}\tilde{A}$ 即 $\lambda_i(B_{ij})_{n_i \times n_j} = \lambda_j(B_{ij})_{n_j \times n_i}$

$$\forall i \neq j \quad \lambda_i B_{ij} = \lambda_j B_{ij} \Rightarrow B_{ij} = 0_{n_i \times n_j}$$

因此 $\tilde{B}$ 是准对角阵.

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} B_{11} & & \\ & \ddots & \\ & & B_{tt} \end{pmatrix}$$

由 $\mu_{\tilde{B}} = \text{lcm}(\mu_{B_{11}}, \dots, \mu_{B_{tt}})$ 无重根 $\Rightarrow \mu_{B_{ii}}$ 无重根 $\Rightarrow \forall i, B_{ii}$ 可对角化.

$\exists Q_i^{-1} \in GL_{n_i}(\mathbb{C})$ s.t. $Q_i^{-1} B_{ii} Q_i = D_i$ 是对角阵.

$$\text{取 } Q = \begin{pmatrix} Q_1 & & \\ & \ddots & \\ & & Q_t \end{pmatrix} \quad Q^{-1} \tilde{B} Q = \begin{pmatrix} D_1 & & \\ & \ddots & \\ & & D_t \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1} \tilde{A} Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 E_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_t E_{n_t} \end{pmatrix} \text{ 仍是对角阵. 综上所述: } P = P_1 Q.$$