期中试题讲解

1. (15分) 设 V 是域 F 上的线性空间, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 是 V 的一组基. 令

$$\epsilon_1 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2,\ \ \epsilon_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2,\ \ \epsilon_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3.$$

(i) 证明: 当 F 特征不等于 2 时, $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 是 V 的基.

(ii) 设 F 的特征不等于 2.

(a) 计算从 $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ 到 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 的转换矩阵.

(b) 设 $\mathbf{x} = 2\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3$. 计算 $\mathbf{x}$ 关于 $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ 的坐标.

证: 出现的错误: V 不一定是向量空间, 也不能假设 $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.

(i) $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (e_1, e_2, e_3)\underbrace{\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}}_{P}$

当 F 特征不是2时, $\det(P) = -2 \neq 0$, 故 $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ 满秩 $\Rightarrow$ $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 也是一组基

(ii) (a) 转换矩阵即为 P

(b). $x = (e_1, e_2, e_3)\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) \cdot P^{-1}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$

所以 x 在 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的坐标是 $P^{-1}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

2. (15分) 设实二次型 $q(\mathbf{x}) = x_1x_2 - x_3^2 + 2x_3x_1$, 其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^t \in \mathbb{R}^3$. 计算:

(i) q 的秩;

(ii) q 的一组规范基;

(iii) q 的签名.

解：(i) 二次型在标准基下的矩阵是：

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

因为 rank(A)=3, 所以 rank(q)=3.

(ii) 对A做行列相伴变换：

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

一组规范基是矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的3个列向量.

(iii) 签名是 (1,2).

3. (15分) 设实线性空间 $V = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) < 3\}$. 再设:

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & V & \longrightarrow & V \\ & p(x) & \mapsto & p(\alpha x) \end{array} \quad 和 \quad \begin{array}{rccc} \Delta: & V & \longrightarrow & V \\ & p(x) & \mapsto & p(\alpha x) - p(x) \end{array},$$

其中 α 是一个固定的非零实数.

(i) 证明: σ 和 Δ 是 V 上的线性算子.

(ii) 计算: σ 和 Δ 在基底 $1, x, x^2$ 下的矩阵.

(iii) 计算 $\ker(\sigma)$ 和 $\ker(\Delta)$ 的维数.

证：$\forall p(x), q(x) \in V$，$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

赋值同态

$\sigma(\lambda p(x)+\mu q(x)) = \lambda p(\alpha x)+\mu q(\alpha x)$

$= \lambda \sigma(p(x))+\mu \sigma(q(x))$

$\Delta(\lambda p(x)+\mu q(x)) = \lambda p(\alpha x)+\mu q(\alpha x) - (\lambda p(x)+\mu q(x))$

$= \lambda(p(\alpha x)-p(x))+\mu(q(\alpha x)-q(x))$

$= \lambda \cdot \Delta(p)+\mu \Delta \cdot (q)$

错误：$\sigma(p(\lambda x+\mu y)) = \lambda p(\alpha x)+\mu p(\alpha y)$

$= \lambda \sigma(p(x))+\mu \sigma(p(y))$

注意：$\sigma(1)=1$，　$\Delta(1)=0$

题干已说明 $\alpha \neq 0$，需讨论 $\begin{cases} \alpha \neq \pm 1 \\ \alpha = 1 \\ \alpha = -1 \end{cases}$

5. (10 分) 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间，V_1, V_2, W 是 V 的子空间且满足

$$V = V_1 + V_2 \quad 和 \quad V = (V_1 \cap V_2) \oplus W.$$

(i) 证明：$\dim(V_1) + \dim(V_2) = 2\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(W)$.

(ii) 证明：$V = V_1 \oplus (V_2 \cap W)$.

证：(i) $\dim(V) = \dim(V_1) + \dim(V_2) - \dim(V_1 \cap V_2)$

另一方面 $\dim(V) = \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(W)$

$\Longrightarrow \dim(V_1) + \dim(V_2) = 2\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(W)$.

(ii) 首先 $V_1 \cap V_2 \cap W = \{0\}$，这是因为 $V = (V_1 \cap V_2) \oplus W$

所以 $V_1 \oplus (V_2 \cap W)$ 一定是直和，只需证 $V = V_1 + (V_2 \cap W)$

下证 $\dim V = \dim(V_1 + (V_2 \cap W))$

$$\dim(V_1 + (V_2 \cap W)) = \dim(V_1) + \dim(V_2 \cap W) - \dim(\underbrace{V_1 \cap V_2 \cap W}_{0})$$

$$= \dim(V_1) + \dim(V_2 \cap W)$$

$$= \dim(V_1) + \dim(V_2) + \dim(W) - \dim(V_2 + W)$$

引入V

$$= \dim(V) + \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(W) - \dim(V_2 + W)$$

$$= 2\dim(V) - \dim(V_2 + W)$$

$\because V_2 + W \subseteq V$, 所以 $\dim(V) \geq \dim(V_2 + W)$

$$\geq \dim(V)$$

又因为 $V_1 + (V_2 \cap W) \subseteq V$ 所以 $\dim(V_1 + (V_2 \cap W)) = \dim(V)$

$\square$

6. (10分) 设 $q(\mathbf{x})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的二次型, 其签名是 (k, l), $k > 0$, $l > 0$ 且 $k + l < n$.

(i) 证明: q 是满射.

(ii) 证明: $\mathbb{R}^n$ 中存在三个非零子空间 V^+, V^- 和 V^0 使得限制映射 $q|_{V^+}$ 正定, $q|_{V^-}$ 负定, $q|_{V^0}$ 恒等于零且 $\mathbb{R}^n = V^+ \oplus V^- \oplus V^0$.

证明: $q: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

设 在$\mathbb{R}^n$的某组规范基 $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ 下,

$$q(\vec{x}) = x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_{k+l}^2$$

其中 $\vec{x} = x_1\varepsilon_1 + \cdots + x_n\varepsilon_n$.

若 $a \in \mathbb{R}^+$, 取 $\vec{x} = \sqrt{a}\,\varepsilon_1$, 则有 $q(\vec{x}) = a$

若 $a \in \mathbb{R}^-$, 取 $\vec{x} = \sqrt{-a}\,\varepsilon_{k+1}$, 则有 $q(\vec{x}) = a$

且 $a = 0$ 时 取 $\vec{x} = \vec{0}$, $q(\vec{0}) = 0$. 所以 q 是满射.

(2) 令 $V^+=\langle \varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_k\rangle$, $V^-=\langle \varepsilon_{k+1},\cdots,\varepsilon_{k+\ell}\rangle$, 和 $V^0=\langle \varepsilon_{k+\ell+1},\cdots,\varepsilon_n\rangle$

则 $q|_{V^+}$ 在规范基下为 $x_1^2+\cdots+x_k^2 \longrightarrow$ 正定

$q|_{V^-}$ 在规范基下为 $-x_{k+1}^2-\cdots-x_{k+\ell}^2 \longrightarrow$ 负定

$q|_{V^0}$ 在规范基下为 0. $\longrightarrow$ 恒等于 0.

因为 $\dim(V^+)+\dim(V^-)+\dim(V^0)=k+\ell+n-(k+\ell)=n=\dim(V^++V^-+V^0)$

所以 $V^++V^-+V^0$ 是直和 且等于 $\mathbb{R}^n$

命题4.14. $\dim(V_1+\cdots+V_k)\le\dim(V_1)+\cdots+\dim(V_k)$

等号成立当且仅当 $V_1+\cdots+V_k$ 是直和.

$\square$

7. (10分) 设 $A\in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 是正定的, $B\in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

(i) 证明: B^tAB 对称且半正定.

(ii) 再设 A 和 B 相似. 证明: $\det(B)>0$ 且 $\mathrm{tr}(B)>0$, 其中 $\mathrm{tr}(B)$ 代表 B 的迹.

证: (i) 设 $C=B^tAB$ 则 $C^t=B^tA^tB=B^tAB \Rightarrow C$ 对称

$\because A$ 正定. $\therefore \exists P\in GL_n(\mathbb{R})$ s.t. $A=P^tP$

$\Rightarrow B^tAB=B^tP^tPB=(PB)^tPB \Rightarrow B^tAB$ 半正定

(ii): A 正定, 所以 A 的任意阶顺序主子式均 >0,

A 的行列式也是 A 的 n 阶顺序主子式, $\therefore >0$.

又 $\because A=P^tP$ 设 $P=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & & a_{nn}\end{pmatrix}$ 则 $P^t=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & & a_{nn}\end{pmatrix}$

$\Rightarrow P^tP=\begin{pmatrix} a_{11}^2+\cdots+a_{n1}^2 & & \\ & \ddots & \\ & & a_{1n}^2+\cdots+a_{nn}^2\end{pmatrix}$ $\quad tr(A)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2>0$

因行列式和迹都是相似不变量 $\therefore tr(B)>0,\ det(B)>0$

Pf: $tr(AB)=tr(BA)\quad \forall A,B\in M_n(\mathbb{R})$

$\therefore tr(B)=tr(P^{-1}AP)=tr(P\cdot P^{-1}A)=tr(A)$ $\square$

8. (15分) 设 V 是域 F 上的有限维维线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性算子.

(i) 证明: 对任意 $k\in\mathbb{Z}^+$, $\ker(\mathcal{A}^k)\subseteq\ker(\mathcal{A}^{k+1})$.

(ii) 证明: 如果存在 $k\in\mathbb{Z}^+$ 使得 $\ker(\mathcal{A}^k)=\ker(\mathcal{A}^{k+1})$, 则对任意 $l>k$,

$$\ker(\mathcal{A}^k)=\ker(\mathcal{A}^l).$$

(iii) 设 $\mathcal{A}$ 的极小多项式 $\mu_{\mathcal{A}}(t)=p(t)q(t)$, 其中 $p,q\in F[t]$ 且 $\gcd(p,q)=1$. 证明: $\ker(p(\mathcal{A}))$ 是关于 $q(\mathcal{A})$ 的不变子空间且 $q(\mathcal{A})$ 限制在 $\ker(p(\mathcal{A}))$ 上是可逆的.

证: (i) 显然 ✓

(ii): 归纳法: , 当 $l=k+1$ 时 $\ker(\mathcal{A}^k)=\ker(\mathcal{A}^l)$ ✓

假设 $n-1>1$, 且当 $l=k+n-1$ 时 有 $\ker(\mathcal{A}^k)=\ker(\mathcal{A}^{k+n-1})$

由(i)知 $\ker(\mathcal{A}^k)\subseteq\ker(\mathcal{A}^{k+1})\subseteq\cdots\subseteq\ker(\mathcal{A}^{k+n-1})$

又 $\because \ker(\mathcal{A}^k)=\ker(\mathcal{A}^{k+n-1})$

$\Longrightarrow \ker(\mathcal{A}^k)=\ker(\mathcal{A}^{k+1})=\cdots=\ker(\mathcal{A}^{k+n-1})$ (☆)

由(i)知 $\ker(\mathcal{A}^{k+n-1})\subseteq\ker(\mathcal{A}^{k+n})$. 另一方面, $\forall \vec{x}\in\ker(\mathcal{A}^{k+n})$,

$\mathcal{A}^{k+n}(\vec{x})=\mathcal{A}^{k+n-1}(\mathcal{A}(\vec{x}))=\vec{0}\Rightarrow \mathcal{A}(\vec{x})\in\ker(\mathcal{A}^{k+n-1})$

由(☆)知 $\mathcal{A}(\vec{x})\in\ker(\mathcal{A}^{k+n-2})$, i.e. $\mathcal{A}^{k+n-1}(\vec{x})=\vec{0}$

$\Longrightarrow \ker(\mathcal{A}^{k+n})\subseteq\ker(\mathcal{A}^{k+n-1})\Longrightarrow \ker(\mathcal{A}^{k+n})=\ker(\mathcal{A}^{k+n-1})$

由归纳假设知 $\ker(\mathcal{A}^k)=\ker(\mathcal{A}^{k+n})$ $\square$

(iii): ①: $\ker(p(\mathcal{A}))$ 是 $q(\mathcal{A})$-不变子空间.

$\because \forall \vec{x} \in \ker p(\mathcal{A})$, 有 $p(\mathcal{A})\vec{x} = \vec{0}$

$p(\mathcal{A}) \cdot (q(\mathcal{A})\vec{x}) = q(\mathcal{A}) p(\mathcal{A}) \vec{x} = q(\mathcal{A}) \cdot \vec{0} = \vec{0}$. ✓

②: $q(\mathcal{A}): \ker(p(\mathcal{A})) \longrightarrow \ker(p(\mathcal{A}))$ 是 [illegible].

$\because \gcd(p, q) = 1$, $\therefore$ 存在 $u, v \in F[t]$, s.t.

$u(t)p(t) + v(t)q(t) = 1$, $\therefore u(\mathcal{A})p(\mathcal{A}) + v(\mathcal{A})q(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$.

对 $\forall \vec{x} \in \ker(p(\mathcal{A}))$

$u(\mathcal{A})p(\mathcal{A})(\vec{x}) + v(\mathcal{A})q(\mathcal{A})(\vec{x}) = \mathcal{E}(x)$

$\Longrightarrow v(\mathcal{A})q(\mathcal{A})(\vec{x}) = \vec{x}$

i.e. $v(\mathcal{A})q(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$ 在 $\ker(p(\mathcal{A}))$ 上.

$\therefore q(\mathcal{A})$ 在 $\ker(p(\mathcal{A}))$ 的逆是 $v(\mathcal{A})$. $\square$

作业题:

1. 略.

2. 设

$$\begin{aligned} \mathcal{D}\colon \mathbb{R}[x]^{(3)} &\longrightarrow \mathbb{R}[x]^{(3)} \\ f(x) &\longmapsto f'(x). \end{aligned}$$

求线性算子 $x\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}^2 + 2\mathcal{D} + \mathcal{E}$ 的所有特征根和特征向量, 并说明这两个线性算子中哪个是可对角化的,哪个不是.

解: 注意 $\mathbb{R}[x]^{(3)} = \{ f(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg f < 3 \}$

所以 $\mathbb{R}[x]^{(3)}$ 中有一组基 $\{1, x, x^2\}$

$$xD(1, x, x^2) = (1, x, x^2)\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}_{A}$$

本身即为对角矩阵.

$|\lambda E - A| = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \lambda = 0,\ \lambda = 1,\ \lambda = 2$

$\lambda = 0$ 时 $(0 \cdot E - A)\cdot\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow V^0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\lambda = 1$ 时 $(1 \cdot E - A)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow V^1 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\lambda = 2$ 时 $(2 \cdot E - A)\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow V^2 = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$.

$D^2 + 2D + \varepsilon(1) = 1 \qquad D^2 + 2D + \varepsilon(x) = 2 + x$

$D^2 + 2D + \varepsilon(x^2) = 2 + 4x + x^2$

所以 $$D^2 + 2D + \varepsilon(1, x, x^2) = (1, x, x^2)\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{B}$$

$|\lambda E - B| = 0 \Rightarrow (\lambda-1)^3 = 0 \Rightarrow \lambda = 1.$

当 $\lambda = 1$ 时 $(1 \cdot E - B)\cdot\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow V^1 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

因为几何重数 < 代数重数. 所以 B 不可以对角化.

$\dim(V^1) = 1 \qquad (\lambda-1)^3 = 0$

3. 设矩阵 $A, B \in M_n(F)$ 且 A 与 B 相似.

(1) 证明: $\mathrm{spec}_F(A) = \mathrm{spec}_F(B)$ 且对于任意 $\lambda \in \mathrm{spec}_F(A)$, $\mathrm{dim}V_A^\lambda = \mathrm{dim}V_B^\lambda$. 其中 V_A^λ, V_B^λ 分别表示矩阵 A, B 关于 λ 的特征子空间.

(2) 设 $B = P^{-1}AP$, 其中 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$, $\boldsymbol{v}$是 A 的特征向量. 证明: $P^{-1}\boldsymbol{v}$ 是 B 的特征向量.

证: $\because A \sim B$, $\therefore \exists P \in GL_n(\mathbb{F})$ s.t. $B = P^{-1}AP$

从而 $|\lambda E - B| = |\lambda E - P^{-1}AP| = |P^{-1}(\lambda E - A)P|$

$= |P^{-1}| \cdot |\lambda E - A| \cdot |P| = |\lambda E - A|$.

A与B特征多项式相同, 自然有 $\mathrm{spec}_F(A) = \mathrm{spec}_F(B)$.

定义: $\phi: V_A^\lambda \longrightarrow V_B^\lambda$

$\vec{x} \longmapsto P^{-1}\vec{x}$

首先说ϕ是良定义的, i.e. 若 $\vec{x} \in V_A^\lambda$, 则 $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$

$B(P^{-1}\vec{x}) = (P^{-1}AP) \cdot (P^{-1}\vec{x}) = P^{-1}A\vec{x} = P^{-1}\lambda\vec{x} = \lambda \cdot P^{-1}\vec{x}$

$\therefore P^{-1}\vec{x} \in V_B^\lambda$.

并且ϕ是线性同构, 首先它是双射:

$\psi: V_B^\lambda \longrightarrow V_A^\lambda$ 显然有 $\phi \circ \psi = \psi \circ \phi = id$

$\vec{x} \longmapsto P\vec{x}$ $\therefore$ ϕ是双射

并且 $\phi(\vec{x}+\vec{y}) = P^{-1}(\vec{x}+\vec{y}) = P^{-1}\vec{x} + P^{-1}\vec{y} = \phi(\vec{x}) + \phi(\vec{y})$

$\forall \alpha \in F$ $\phi(\alpha \cdot \vec{x}) = P^{-1}(\alpha\vec{x}) = \alpha P^{-1}\vec{x} = \alpha\phi(\vec{x})$.

所以 ϕ是线性同构 $\Rightarrow$ $\dim V_B^\lambda = \dim V_A^\lambda$.

证: $\dim(V_A^{\lambda}) = \dim(\mathrm{sol}(\lambda E - A)x = 0) = n - \mathrm{rank}(\lambda E - A)$

$\dim(V_B^{\lambda}) = \dim(\mathrm{sol}(\lambda E - B)x = 0) = n - \mathrm{rank}(\lambda E - B)$

$\because \lambda E - B = \lambda E - P^{-1}AP = P^{-1}(\lambda E - A)P$

其中 P 可逆, 所以 $\mathrm{rank}(\lambda E - B) = \mathrm{rank}(\lambda E - A)$

$\Rightarrow \dim(V_A^{\lambda}) = \dim(V_B^{\lambda})$ $\square$

(2) 同理 —

4. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ 在标准基下的矩阵是

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

设 $\boldsymbol{v} = (1,0,1)^t$ 和 $\boldsymbol{w} = (1,0,0)^t$.

(1) 计算 $\dim(\mathbb{R}[\mathcal{A}] \cdot \boldsymbol{v})$ 和 $\dim(\mathbb{R}[\mathcal{A}] \cdot \boldsymbol{w})$.

(2) 判断 $\mathbb{R}^3$ 是不是 $\mathcal{A}$-循环的, 并说明理由.

证明 $\mathcal{A}v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 则 $\mathbb{R}[\mathcal{A}] \cdot v = \langle v \rangle$

所以, $\dim(\mathbb{R}[\mathcal{A}] \cdot v) = 1$

5. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 且 V 是 $\mathcal{A}$-循环的. 再设 $U_1, U_2 \subset V$ 是 $\mathcal{A}$-子空间满足

$$V = U_1 \oplus U_2.$$

证明: U_1 和 U_2 都是 $\mathcal{A}$-循环子空间.

证: $\because$ V 是 $\mathcal{A}$-循环的, $\therefore$ $\exists\, v \in V$ s.t. $V = F[\mathcal{A}] \cdot v$

$\because V = U_1 \oplus U_2$ $\therefore$ $\exists$ 唯一的 u_1, u_2 s.t. $v = u_1 + u_2$

从而 $\forall \vec{x} \in V$, $\exists f(t) \in F[t]$, s.t. $\vec{x} = f(\mathscr{A}) \cdot \vec{v} = f(\mathscr{A})(u_1 + u_2)$

$= f(\mathscr{A}) u_1 + f(\mathscr{A}) u_2$

因为 U_1, U_2 是 $\mathscr{A}$-子空间. $\therefore f(\mathscr{A}) u_1 \in U_1$, $f(\mathscr{A}) u_2 \in U_2$

又对 $\forall \vec{x} \in U_1 \subseteq V$ $\exists g(t) \in F[t]$, s.t. $\vec{x} = g(\mathscr{A}) \vec{v} = g(\mathscr{A}) u_1 + g(\mathscr{A}) u_2$

此时 $\vec{x} - g(\mathscr{A}) u_1 \in U_1$, $g(\mathscr{A}) u_2 \in U_2$

因为 $U_1 \cap U_2 = \{0\} \Rightarrow g(\mathscr{A}) u_2 = 0$

$\Rightarrow \vec{x} = g(\mathscr{A}) u_1$ i.e. $U_1 \subseteq F[\mathscr{A}] \cdot u_1$

又因为 $F[\mathscr{A}] \cdot u_1 \subseteq U_1 \Rightarrow U_1 = F[\mathscr{A}] \cdot u_1$

同理 有 $U_2 = F[\mathscr{A}] \cdot u_2$, $\therefore U_1, U_2$ 都是 $\mathscr{A}$-循环子空间 $\square$