2025年春季学期第十二周作业

1. 设 $S=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. 把 S 看成 $\mathbb{R}$ 上的矩阵是否能对角化? 看成 $\mathbb{C}$ 上的矩阵能否对角化? 请说明理由.

2. 设

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\colon \mathbb{R}[x]^{(3)} &\longrightarrow \mathbb{R}[x]^{(3)}\\ f(x) &\longmapsto f'(x).\end{aligned}$$

   求线性算子 $x\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}^2+2\mathcal{D}+\mathcal{E}$ 的所有特征根和特征向量, 并说明这两个线性算子中哪个是可对角化的,哪个不是.

3. 设矩阵 $A,B\in M_n(F)$ 且 A 与 B 相似.

   (1) 证明: $\mathrm{spec}_F(A)=\mathrm{spec}_F(B)$ 且对于任意 $\lambda\in\mathrm{spec}_F(A)$, $\mathrm{dim}V_A^{\lambda}=\mathrm{dim}V_B^{\lambda}$. 其中 $V_A^{\lambda},V_B^{\lambda}$ 分别表示矩阵 A,B 关于 λ 的特征子空间.

   (2) 设 $B=P^{-1}AP$, 其中 $P\in\mathrm{GL}_n(F)$, $\boldsymbol{v}$是 A 的特征向量. 证明: $P^{-1}\boldsymbol{v}$ 是 B 的特征向量.

4. 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ 在标准基下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

   设 $\boldsymbol{v}=(1,0,1)^t$ 和 $\boldsymbol{w}=(1,0,0)^t$.

   (1) 计算 $\dim(\mathbb{R}[\mathcal{A}]\cdot\boldsymbol{v})$ 和 $\dim(\mathbb{R}[\mathcal{A}]\cdot\boldsymbol{w})$.

   (2) 判断 $\mathbb{R}^3$ 是不是 $\mathcal{A}$-循环的, 并说明理由.

5. 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(V)$ 且 V 是 $\mathcal{A}$-循环的. 再设 $U_1,U_2\subset V$ 是 $\mathcal{A}$-子空间满足

$$V=U_1\oplus U_2.$$

   证明: U_1 和 U_2 都是 $\mathcal{A}$-循环子空间.

可对角判别法:

1. A有n个线性无关的特征向量

   充分条件: χ_A在F中有n个不同的根.

2. $\mathrm{spec}_F(A)=\{\lambda_1,\cdots,\lambda_k\}$. $V=V^{\lambda_1}\oplus\cdots\oplus V^{\lambda_k}$

3. $\dim(V^{\lambda_1})+\cdots+\dim(V^{\lambda_k})=\dim(V)$.

4 (i) $\chi_A(t)$在$F[t]$中可以分解为一次因子之积. (ii) $\forall\lambda\in\mathrm{spec}_F(A)$, λ的几何重数等于代数重数.

5. $\mu_A(t)$在$F[t]$中可以分解为两两互素一次因子之积、

循环空间:

V是$\mathcal{A}$-循环的 如果存在$\vec{v}\in V$使得$V=F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$.

1. $\deg\mu_{\mathcal{A}}=\dim V$.

2 $\mu_{\mathcal{A}}=\chi_{\mathcal{A}}$

Hamilton-Cayley定理: $\mu_{\mathcal{A}}\mid\chi_{\mathcal{A}}$

不可约分解. $\mu_{\mathcal{A}}=p_1^{m_1}\cdots p_s^{m_s}$. $\chi_{\mathcal{A}}=p_1^{n_1}\cdots p_s^{n_s}$

$1\le m_1\le n_1,\cdots,1\le m_s\le n_s$ 且 $n_1+\cdots+n_s=n$.

1. 设 $S=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. 把 S 看成 $\mathbb{R}$ 上的矩阵是否能对角化? 看成 $\mathbb{C}$ 上的矩阵能否对角化? 请说明理由.

解: S 的特征多项式: $\chi_S(t)=|tE-S|=\begin{vmatrix}t & -1\\ 1 & t\end{vmatrix}=t^2+1$

$\chi_S(t)$ 在 $\mathbb{R}$ 上无零点, 即 S 没有实特征根.

$\chi_S(t)$ 在 $\mathbb{C}$ 上有根 $\pm i$. 即 S 有两个不同的特征根.

故 S 看成 $\mathbb{C}$ 上的矩阵可对角化.

2. 设

$$\begin{aligned}\mathcal{D}\colon \mathbb{R}[x]^{(3)} &\longrightarrow \mathbb{R}[x]^{(3)} = \langle 1, x, x^2\rangle\\ f(x) &\longmapsto f'(x). \quad = \{p(x)\in\mathbb{R}[x] \mid \deg p(x)\le 2\}.\end{aligned}$$

求线性算子 $x\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}^2+2\mathcal{D}+\mathcal{E}$ 的所有特征根和特征向量, 并说明这两个线性算子中哪个是可对角化的,哪个不是.

解: 线性算子 $x\mathcal{D}$ 在基 $1, x, x^2$ 下的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$

$$\chi_A(t) = |tE-A| = \begin{vmatrix} t & & \\ & t-1 & \\ & & t-2 \end{vmatrix} = t(t-1)(t-2).$$

由 $\chi\mathscr{D}$ 有3个不同的特征根 $\lambda_1=0, \lambda_2=1, \lambda_3=2$，可得 $\chi\mathscr{D}$ 可对角化.

$V_{\lambda_1} = \langle 1 \rangle$, $V_{\lambda_2} = \langle x \rangle$, $V_{\lambda_3} = \langle x^2 \rangle$

$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ $\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

线性算子 $\mathscr{D}^2+2\mathscr{D}+\mathscr{E}$ 在基 $1, x, x^2$ 下的矩阵为 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\chi_B(t) = |tE-B| = \begin{vmatrix} t-1 & -2 & -2 \\ 0 & t-1 & -4 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^3$$ $\therefore$ B 有唯一特征根 $\lambda=1$.

解线性方程组 $(E-B)X=\vec{0}$ 得：$V' = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$

故B不可对角化. $E-B \neq 0 \Rightarrow \mu_B(t) \neq t-1$

3. 设矩阵 $A, B \in M_n(F)$ 且 A 与 B 相似.

(1) 证明: $\mathrm{spec}_F(A) = \mathrm{spec}_F(B)$ 且对于任意 $\lambda \in \mathrm{spec}_F(A)$, $\mathrm{dim}V_A^\lambda = \mathrm{dim}V_B^\lambda$. 其中 V_A^λ, V_B^λ 分别表示矩阵 A, B 关于 λ 的特征子空间.

(2) 设 $B = P^{-1}AP$, 其中 $P \in \mathrm{GL}_n(F)$, $\boldsymbol{v}$是 A 的特征向量. 证明: $P^{-1}\boldsymbol{v}$ 是 B 的特征向量.

证明 (1) 设 $B = P^{-1}AP$. $\chi_B(t) = |tE - B| = |tE - P^{-1}AP| = |P^{-1}(tE - A)P|$

$= |P|^{-1} \cdot |tE - A| \cdot |P| = |P|^{-1} \cdot |P| \cdot |tE - A|$

$= |tE - A|$

$= \chi_A(t)$

故 $\chi_B(t)$在F中的零点集与$\chi_A(t)$在F中的零点集相同, 即 $\mathrm{spec}_F(A) = \mathrm{spec}_F(B)$.

$\forall \lambda \in \mathrm{spec}_F(A) = \mathrm{spec}_F(B)$, $\mathrm{rank}(\lambda E - A) = \mathrm{rank}(\lambda E - P^{-1}AP) = \mathrm{rank}(\lambda E - B)$.

$\dim V_A^\lambda = n - \mathrm{rank}(\lambda E - A) = n - \mathrm{rank}(\lambda E - B) = \dim V_B^\lambda$.

(2) 设 $A\vec{v}=\lambda\vec{v}$. $B\cdot P^{-1}\vec{v}=P^{-1}AP\cdot P^{-1}\vec{v}=P^{-1}A\cdot\vec{v}=P^{-1}\lambda\cdot\vec{v}=\lambda P^{-1}\cdot\vec{v}$.

$\therefore$ $P^{-1}\vec{v}$ 是B的特征向量.

$\varphi: V_A^{\lambda}\to V_B^{\lambda}$ 是线性同构.

$\vec{v}\mapsto P^{-1}\vec{v}$

$A\sim B$ $f(A)\sim f(B)$, $f\in F[t]$

$f=a_nt^n+\cdots+a_1t+a_0$. $f(B)=a_nB^n+\cdots+a_1B+a_0E=P^{-1}(a_nA^n+\cdots+a_1A+a_0E)\cdot P=P^{-1}f(A)P$

4. 设 $\mathcal{A}\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ 在标准基下的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$$

设 $\boldsymbol{v}=(1,0,1)^t$ 和 $\boldsymbol{w}=(1,0,0)^t$.

(1) 计算 $\dim(\mathbb{R}[\mathcal{A}]\cdot\boldsymbol{v})$ 和 $\dim(\mathbb{R}[\mathcal{A}]\cdot\boldsymbol{w})$.

(2) 判断 $\mathbb{R}^3$ 是不是 $\mathcal{A}$-循环的, 并说明理由.

解：(1) $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\mathcal{A}(\vec{v})=A\cdot\vec{v}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

故 $\mathbb{R}[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}=\langle\vec{v}\rangle_{\mathbb{R}}$. $\Rightarrow \dim(\mathbb{R}[\mathcal{A}]\cdot\vec{v})=1$.

$\vec{w}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\mathcal{A}(\vec{w})=A\cdot\vec{w}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$,

$\mathcal{A}^2(\vec{w})=A^2\cdot\vec{w}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$,

注意到 $\langle\vec{w},\mathcal{A}(\vec{w}),\mathcal{A}^2(\vec{w})\rangle_{\mathbb{R}}=\mathbb{R}^3$.

$\because \langle\vec{w},\mathcal{A}(\vec{w}),\mathcal{A}^2(\vec{w})\rangle_{\mathbb{R}}\subseteq\mathbb{R}[\mathcal{A}]\cdot\vec{w}\subseteq\mathbb{R}^3$ $\therefore \mathbb{R}[\mathcal{A}]\vec{w}=\mathbb{R}^3\Rightarrow\dim(\mathbb{R}[\mathcal{A}]\cdot\vec{w})=3$.

(2). $\mathbb{R}^3$是$\mathcal{A}$循环的. 因为 $\mathbb{R}[\mathcal{A}]\cdot\vec{w}=\mathbb{R}^3$.

$\mu_A(t)=t^3$, $\deg\mu_A=3$

5. 设 $\mathcal{A} \in \mathcal{L}(V)$ 且 V 是 $\mathcal{A}$-循环的. 再设 $U_1, U_2 \subset V$ 是 $\mathcal{A}$-子空间满足

$$V = U_1 \oplus U_2.$$

证明: U_1 和 U_2 都是 $\mathcal{A}$-循环子空间.

证明: 由 V 是 $\mathcal{A}$-循环的, $\exists \vec{v} \in V$ s.t. $V = F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}$.

由 $V = U_1 \oplus U_2$. 设 $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, 其中 $\vec{v}_1 \in U_1$, $\vec{v}_2 \in U_2$

显然, $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}_1 \subseteq U_1$ 下面证明: $\forall \vec{w} \in U_1$, $\vec{w} \in F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}_1$.

$\exists f \in F[t]$ s.t. $\vec{w} = f(\mathcal{A})\cdot\vec{v} = f(\mathcal{A})\cdot\vec{v}_1 + f(\mathcal{A})\cdot\vec{v}_2$.

$\because f(\mathcal{A})\cdot\vec{v}_1 \in U_1$, $f(\mathcal{A})\cdot\vec{v}_2 \in U_2$ 且 $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

$\therefore f(\mathcal{A})\cdot\vec{v}_2 = \vec{0}$, $\vec{w} = f(\mathcal{A})\cdot\vec{v}_1$

故 $U_1 = F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}_1$

同理可证: $U_2 = F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}_2$.

综合上述, U_1 与 U_2 都是 $\mathcal{A}$-循环的.

(维数角度证明 $U_1 = F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}_1$, $U_2 = F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}_2$)

$F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}_1 \subseteq U_1$, $F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}_2 \subseteq U_2$ $\quad V = U_1 \oplus U_2 = F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}_1 \oplus F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v}_2$

故 $\dim V = \dim F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v_1} + \dim F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v_2}$

$\leq \dim U_1 + \dim U_2$

$= \dim V$.

$\Rightarrow \dim F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v_1} = \dim U_1$ 且 $\dim F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v_2} = \dim U_2$.

$\Rightarrow U_1 = F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v_1}$，$U_2 = F[\mathcal{A}]\cdot\vec{v_2}$.

从极小多项式的角度

$\because$ V 是 $\mathcal{A}$-循环的，设 $\dim V = n$.

$\therefore \deg \mu_{\mathcal{A}} = n$.

$\because$ $U_1, U_2 \subset V$ 是 $\mathcal{A}$-子空间满足 $V = U_1 \oplus U_2$. 进一步设 $\dim U_1 = n_1$, $\dim U_2 = n_2$.

$\therefore \mu_{\mathcal{A}} = \operatorname{lcm}(\mu_{\mathcal{A}_{U_1}}, \mu_{\mathcal{A}_{U_2}})$，$n_1 + n_2 = n$

$\deg \mu_{\mathcal{A}_{U_1}} \leq n_1$，$\deg \mu_{\mathcal{A}_{U_2}} \leq n_2$.

$\deg \mu_{\mathcal{A}} = \deg \operatorname{lcm}(\mu_{\mathcal{A}_{U_1}}, \mu_{\mathcal{A}_{U_2}}) \leq \deg \mu_{\mathcal{A}_{U_1}} + \deg \mu_{\mathcal{A}_{U_2}} \leq n_1 + n_2 = n$.

$\therefore \deg \mu_{\mathcal{A}_{U_1}} = n_1$，$\deg \mu_{\mathcal{A}_{U_2}} = n_2$

$\therefore$ U_1, U_2 都是 $\mathcal{A}$-循环的.

期中考试部分习题:

3. (15分) 设实线性空间 $V = \{p \in \mathbb{R}[x] \mid \deg(p) < 3\}$. 再设:

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & V & \longrightarrow & V \\ & p(x) & \mapsto & p(\alpha x) \end{array} \quad \text{和} \quad \begin{array}{rccc} \Delta: & V & \longrightarrow & V \\ & p(x) & \mapsto & p(\alpha x) - p(x) \end{array},$$

其中 α 是一个固定的非零实数.

(i) 证明: σ 和 Δ 是 V 上的线性算子.

(ii) 计算: σ 和 Δ 在基底 $1, x, x^2$ 下的矩阵.

(iii) 计算 $\ker(\sigma)$ 和 $\ker(\Delta)$ 的维数.

解. *(i)* 因为赋值是环同态, 所以对任意 $f, g \in V$, $\sigma(f+g) = \sigma(f) + \sigma(g)$. 对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$, $\sigma(\lambda f) = (\lambda f)(\alpha x) = \lambda f(\alpha x) = \lambda \sigma(f)$. 综上所述, σ 是线性算子. *(3分)*

因为 $\Delta = \sigma - \mathcal{E}$ 且 $\mathcal{L}(V)$ 是线性空间, 所以 Δ 也是线性算子. *(2分)*

(ii) 注意到 $(\sigma(1), \sigma(x), \sigma(x^2)) = (1, \alpha x, \alpha^2 x^2) = (1, x, x^2)\mathrm{diag}(1, \alpha, \alpha^2)$. 故 σ 在 $1, x, x^2$ 下的矩阵是 $\mathrm{diag}(1, \alpha, \alpha^2)$. 而 Δ 在同样基底下的矩阵是

$$\mathrm{diag}(1, \alpha, \alpha^2) - E = \mathrm{diag}(0, \alpha - 1, \alpha^2 - 1) - E. \quad \textit{(5分)}$$

(iii) 因为 $\mathrm{rank}(\sigma) = 3$, 所以 $\dim(\ker(\sigma)) = 0$. 当 $\alpha \neq \pm 1$ 时, $\mathrm{rank}(\Delta) = 2$. 故 $\dim(\Delta) = 1$. 当 $\alpha = -1$ 时, $\mathrm{rank}(\Delta) = 1$. 故 $\dim(\ker(\Delta)) = 2$. 当 $\alpha = 1$ 时, $\mathrm{rank}(\Delta) = 0$. 故 $\dim(\ker(\Delta)) = 3$. *(5分)*

→ 分类讨论 $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & \alpha-1 & \\ & & \alpha^2-1 \end{pmatrix}$ 的秩.

5. (10 分) 设 V 是域 F 上的 n 维线性空间, V_1, V_2, W 是 V 的子空间且满足

$$V = V_1 + V_2 \quad \text{和} \quad V = (V_1 \cap V_2) \oplus W.$$

(i) 证明: $\dim(V_1) + \dim(V_2) = 2\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(W)$.

(ii) 证明: $V = V_1 \oplus (V_2 \cap W)$.

证明. *(i)* 由条件可知 $\dim(V_1 + V_2) = \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(W)$. 利用关于 V_1 和 V_2 的维数公式得: $\dim(V_1) + \dim(V_2) = 2\dim(V_1 \cap V_2) + \dim(W)$. *(5分)*

(ii) 因为 $V = (V_1 \cap V_2) \oplus W$, 所以 $(V_1 \cap V_2) \cap W = \{\mathbf{0}\}$. 故 $V_1 + (V_2 \cap W)$ 是直和. *(2分)*

下面只需证明: $V = V_1 + (V_2 \cap W)$.

方法 *1.* 因为 $V = V_1 \cap V_2 + W$ 和 $V_1 \cap V_2 \subset V_2$, 所以 $V_2 = V_1 \cap V_2 + V_2 \cap W$ (子空间模律) 由此和 $V = V_1 + V_2$ 可知

$$V = V_1 + V_1 \cap V_2 + V_2 \cap W = V_1 + V_2 \cap W. \quad \textit{(3分)}$$

方法 *2.* 利用维数公式计算:

$$\begin{aligned}
\dim(V_1 + (V_2 \cap W)) &= \dim(V_1) + \dim(V_2 \cap W) \quad (\because\ V_1 \cap V_2 \cap W = \{\mathbf{0}\}) \\
&= \dim(V_1) + \dim(V_2) + \dim(W) - \dim(V_2 + W) \\
&= \dim(V) + \dim(V_1 \cap V_2) + \dim(W) - \dim(V_2 + W) \quad (\because\ V = V_1 + V_2) \\
&= 2\dim(V) - \dim(V_2 + W) \quad (\because\ V = (V_1 \cap V_2) \oplus W) \\
&\geq \dim(V).
\end{aligned}$$

因为 $V_1 + (V_2 \cap W) \subset V$, 所以上式蕴含 $V = V_1 + (V_2 \cap W)$. *(3分)*

一般情况下,

$V = V_1 + V_2$.

$V \cap W \neq (V_1 \cap W) + (V_2 \cap W)$.

要证 $V \subseteq V_1 + (V_2 \cap W)$.

只需证:

$\dim(V) = \dim(V_1 + V_2 \cap W)$

以下解释为什么用基扩张的做法存在问题:

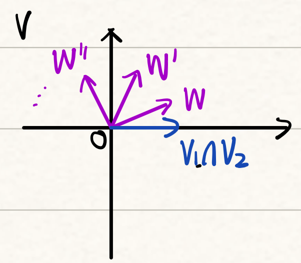
设 $V_1 \cap V_2$ 的基为 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k\}$.

由此分别扩充为 V_1 的一组基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \beta_1, \cdots, \beta_s\}$, V_2 的一组基 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \gamma_1, \cdots, \gamma_t\}$

由 $V = V_1 + V_2$. V 的一组基为 $\{\alpha_1, \cdots, \alpha_k, \beta_1, \cdots, \beta_s, \gamma_1, \cdots, \gamma_t\}$.

由 $V = (V_1 \cap V_2) \oplus W$. W 一种特殊情况为 $\langle \beta_1, \cdots, \beta_s, \gamma_1, \cdots, \gamma_t \rangle$. 那么 $V_2 \cap W = \langle \gamma_1, \cdots, \gamma_t \rangle$.

e.g. $V_1 = \langle \vec{e_1}, \vec{e_2} \rangle$, $V_2 = \langle \vec{e_1} \rangle$



6. (10分) 设 $q(\mathbf{x})$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的二次型, 其签名是 (k,l), $k>0$, $l>0$ 且 $k+l<n$.

(i) 证明: q 是满射.

(ii) 证明: $\mathbb{R}^n$ 中存在三个非零子空间 V^+, V^- 和 V^0 使得限制映射 $q|_{V^+}$ 正定, $q|_{V^-}$ 负定, $q|_{V^0}$ 恒等于零且 $\mathbb{R}^n = V^+ \oplus V^- \oplus V^0$.

证明. *(i). (法 1)* 因为 q 是不定的, 所以存在 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$ 使得 $q(\mathbf{x})>0$ 和 $q(\mathbf{y})<0$. 设 $a,\lambda\in\mathbb{R}$.

如果 $a>0$, 则 $q(\lambda\mathbf{x})=\lambda^2 q(\mathbf{x})$. 故取 $\lambda=\sqrt{a/q(\mathbf{x})}$ 得 $q(\lambda\mathbf{x})=a$.
如果 $a<0$, 则 $q(\lambda\mathbf{y})=\lambda^2 q(\mathbf{y})$. 故取 $\lambda=\sqrt{a/q(\mathbf{y})}$ 得 $q(\lambda\mathbf{x})=a$.
再由 $q(\mathbf{0})=0$ 可知 q 是满射. *(5分)*
(法 2) 设在 $\mathbb{R}^n$ 的某组规范基 $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$ 下,

$$q(\mathbf{x}) = x_1^2+\cdots+x_k^2-x_{k+1}^2-\cdots-x_{k+l}^2,$$

其中 $\mathbf{x}=x_1\epsilon_1+\cdots+x_n\epsilon_n$. 如果 $a\in\mathbb{R}^+$, 则我们取 $\mathbf{x}=\sqrt{a}\,\epsilon_1$. 我们有 $q(\mathbf{x})=a$. 如果 $a\in\mathbb{R}^-$. 则我们取 $\mathbf{x}=\sqrt{-a}\,\epsilon_{k+1}$.我们有 $q(\mathbf{x})=a$. 再由 $q(\mathbf{0})=0$ 可知 q 是满射. *(5分)*

(ii) 利用法 2 中的符号, 令 $V^+=\langle\epsilon_1,\ldots,\epsilon_k\rangle$, $V^-=\langle\epsilon_{k+1},\ldots,\epsilon_{k+l}\rangle$, 和 $V^0=\langle\epsilon_{k+l+1},\ldots,\epsilon_n\rangle$. 则 $q|_{V^+}$ 正定, $q|_{V^-}$ 负定和 $q|_{V^0}$ 恒等于零. 因为

$$\dim(V^+)+\dim(V^-)+\dim(V^0)=k+l+n-k-l=n=\dim(V^++V^-+V^0),$$

所以三个子空间之和是直和且等于 $\mathbb{R}^n$. *(5分)*

区分线性函数和二次型
$V\to F$.

线性函数 $f(\vec{x})$ 在任一组基底下的坐标表示为齐一次多项式.
$f\in \mathrm{Hom}(V,F)$ f 不是零映射.
$\Rightarrow$ $\mathrm{im}(f)=F$.

二次型 $q(\vec{x})$ 在任一组基底下的坐标表示为齐二次多项式.
$\mathrm{im}(q)$ 不构成 $\mathbb{R}$-线性空间.

将 V 的一组基底划分为 m 个互不相交的集合, 分别张成 m 个子空间 $V_1,\ldots,V_m$. 则 $V=V_1\oplus\cdots\oplus V_m$.

$\forall i=1,\ldots,m$. $V_i\cap(V_1+\cdots+V_{i-1}+V_{i+1}+\cdots+V_m)=\{0\}$.

7. (10分) 设 $A \in \mathrm{SM}_n(\mathbb{R})$ 是正定的, $B \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

(i) 证明: B^tAB 对称且半正定. (5分)

(ii) 再设 A 和 B 相似. 证明: $\det(B) > 0$ 且 $\mathrm{tr}(B) > 0$, 其中 $\mathrm{tr}(B)$ 代表 B 的迹. (5分)

证明: *(i)* 设 $C = B^tAB$. 则 $C^t = B^tA^tB = B^tAB = C$. 故 C 对称. *(2分)*

因为 A 正定, 所以 $A = P^tP$, 其中 P 是可逆方阵. 于是,

$$C = B^tP^tPB = (PB)^t(PB).$$

故 C 半正定.

(ii) 因为 A 正定, 所以 $\det(A) > 0$ 且 $\mathrm{tr}(A) > 0$ (正定蕴含一阶主子式都大于零). 因为行列式和迹都是相似不变量, 所以 $\det(B) > 0$ 且 $\mathrm{tr}(B) > 0$. *(5分)*

$A = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ $\forall i = 1, \dots, n.$ $q(\vec{e_i}) = a_{ii} > 0.$

8. *(15分)* 设 V 是域 F 上的有限维维线性空间, $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性算子.

(i) 证明: 对任意 $k \in \mathbb{Z}^+$, $\ker(\mathcal{A}^k) \subseteq \ker(\mathcal{A}^{k+1})$. *(5分)*

(ii) 证明: 如果存在 $k \in \mathbb{Z}^+$ 使得 $\ker(\mathcal{A}^k) = \ker(\mathcal{A}^{k+1})$, 则对任意 $l > k$,

$$\ker(\mathcal{A}^k) = \ker(\mathcal{A}^l). \quad (5分)$$

(iii) 设 $\mathcal{A}$ 的极小多项式 $\mu_{\mathcal{A}}(t) = p(t)q(t)$, 其中 $p, q \in F[t]$ 且 $\gcd(p, q) = 1$. 证明: $\ker(p(\mathcal{A}))$ 是关于 $q(\mathcal{A})$ 的不变子空间且 $q(\mathcal{A})$ 限制在 $\ker(p(\mathcal{A}))$ 上是可逆的. *(5分)*

证明: (i) 设 $\mathbf{x} \in \ker(\mathcal{A}^k)$. 则 $\mathcal{A}^k(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. 故 $\mathcal{A}^{k+1}(\mathbf{x}) = \mathcal{A}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. 由此得到 $\ker(\mathcal{A}^k) \subseteq \ker(\mathcal{A}^{k+1})$. (5分)

(ii) 对 l 归纳. 当 $l = 1$ 时, 结论显然. 设 $l > 1$ 且

$$\ker(\mathcal{A}^k) = \ker(\mathcal{A}^{k+1}) = \cdots = \ker(\mathcal{A}^{k+l-1}).$$

由 (i) 可知 $\ker(\mathcal{A}^{k+l-1}) \subset \ker(\mathcal{A}^{k+l})$. 设 $\mathbf{x} \in \ker(\mathcal{A}^{k+l})$. 则 $\mathcal{A}^{k+l}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. 故 $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \in \ker(\mathcal{A}^{k+l-1})$. 由归纳假设可知, $\mathcal{A}(\mathbf{x}) \in \ker(\mathcal{A}^{k+l-2})$. 故 $\mathcal{A}^{k+l-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. 即 $\mathbf{x} \in \ker(\mathcal{A}^{k+l-1})$. 于是, $\ker(\mathcal{A}^{k+l-1}) = \ker(\mathcal{A}^{k+l})$. 再由归纳假设, $\ker(\mathcal{A}^k) = \ker(\mathcal{A}^l)$. (5分)

(iii) 因为 $p(\mathcal{A})q(\mathcal{A}) = q(\mathcal{A})p(\mathcal{A})$, 所以 $\ker(p(\mathcal{A}))$ 是关于算子 $q(\mathcal{A})$ 的不变子空间. 于是, $q(\mathcal{A})$ 是 $\ker(p(\mathcal{A}))$ 上的线性算子. 因为 $\gcd(p, q) = 1$, 所以存在 $u, v \in F[t]$ 使得 $u(t)p(t) + v(t)q(t) = 1$. 故 $u(\mathcal{A})p(\mathcal{A}) + v(\mathcal{A})q(\mathcal{A}) = \mathcal{E}$. 对任意 $\mathbf{x} \in \ker(p(\mathcal{A}))$,

$$u(\mathcal{A})p(\mathcal{A})(\mathbf{x}) + v(\mathcal{A})q(\mathcal{A})(\mathbf{x}) = \mathcal{E}(\mathbf{x}) \implies v(\mathcal{A})q(\mathcal{A})(\mathbf{x}) = \mathbf{x}.$$

故 $q(\mathcal{A})$ 在 $\ker(p(\mathcal{A}))$ 的逆是 $v(\mathcal{A})$. (5分)

设 $A, B \in \mathcal{L}(V)$ 满足 $AB = BA$. 则 $\ker(B)$ 和 $\mathrm{im}(B)$ 是 A 的不变子空间.

$p, q \in F[t]$. $\gcd(p, q) = 1$, 那么 $\exists u, v \in F[t]$ s.t. $u \cdot p + v \cdot q = 1$. 扩展欧几里德算法.

$A \in \mathcal{L}(V)$ $\quad u(A) \cdot p(A) + v(A) \cdot q(A) = \mathcal{E}$.

$$u(A) \cdot p(A) \cdot \vec{v} + v(A) \cdot q(A) \cdot \vec{v} = \mathcal{E} \cdot \vec{v} = \vec{v}$$

$\deg(p) \geq \deg(q)$. $\exists\, r, s \in F[t]$. s.t. $p = s\cdot q + r$. $\deg(r) < \deg(q)$. 多项式的带余除法.

$$p(A) = s(A)\cdot q(A) + r(A)$$

$$p(A)\cdot \vec{v} = s(A)\cdot q(A)\cdot \vec{v} + r(A)\cdot \vec{v}.$$