

复数域上的 Jordan 标准型:

1. 关于 Jordan 块: $J_n(\lambda)$: 关于 λ 的 n 阶 Jordan 块.

$$\text{记 } J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \mathbb{R}^n$$

$$\textcircled{1} J_n(\lambda)^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & \lambda^{n-1} & * \\ & \lambda^n & \ddots \\ 0 & & \ddots & \lambda^n \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} J_n(\lambda) - \lambda E_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & \ddots & \\ 0 & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{rank}(J_n(\lambda) - \lambda E_n) = n-1$$

$$(J_n(\lambda) - \lambda E_n)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & \ddots & \\ & & 0 & \ddots & 1 \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{rank}(J_n(\lambda) - \lambda E_n)^2 = n-2$$

$$(J_n(\lambda) - \lambda E_n)^{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ & 0 & \ddots & 0 & \\ & & \ddots & 0 & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{rank}(J_n(\lambda) - \lambda E_n)^{n-1} = 1$$

$$(J_n(\lambda) - \lambda E_n)^n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{rank}(J_n(\lambda) - \lambda E_n)^n = 0$$

$$\textcircled{3} \chi_{T_n(\lambda)} = (t-\lambda)^n \quad \mu_{T_n(\lambda)} = (t-\lambda)^n$$

$\textcircled{4} A \in L(V)$, 则 A 在某基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{d_2}(\lambda_2) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & \cdots & \cdots & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix}$$

其中 $d_1, \dots, d_k \in \mathbb{Z}^+$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$, 都不必两两不同.

$$\text{eg: } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim J_A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & 1 & & & & \\ & & 1 & 1 & & & \\ & & & 1 & 1 & & \\ & & & & 1 & 1 & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} J_2(2) & & & \\ & J_2(1) & & \\ & & J_2(1) & \\ & & & J_1(1) \end{pmatrix}$$

即 $d_1 = d_2 = d_3 = 2$, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$

也就是 A 的 Jordan 标准型中

关于特征值 2 有 1 个 Jordan 块, 包括一个 2 阶块.

关于特征值 1 有 3 个 Jordan 块, 包括 2 个 2 阶块, 1 个 1 阶块.

问题: 给一个矩阵 A , 计算 A 的 Jordan 标准型.

通过 $n - \text{rank}(A - \lambda E_n)$

事实: ① $\text{rank}((A-\lambda E)^k) = \text{rank}((J_A-\lambda E)^k)$

② λ 的几何重数 $= n - \text{rank}(A-\lambda E)$ 等于属于 λ 的 Jordan 块个数

λ 的代数重数等于 λ 在 J_A 主对角线上出现的次数

$$(\because |\lambda E - A| = |\lambda E - J_A|)$$

③ λ 在极小多项式中的重数 $=$ 属于 λ 的 Jordan 块的最大阶数

1. 设

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

把 A^{-1} 和 A^4 表示为 A^0, A, A^2 和 A^3 的线性组合.

解: A 的特征多项式: $|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 1 \\ -2 & \lambda-1 & 0 \\ -1 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 \lambda + 2 \cdot (-1-1) - 1 \cdot (-1+1)$

$$= \lambda^3 - 2\lambda^2 - 3$$

由 C-H 定理 $A^3 - 2A^2 - 3E = 0$

所以 $A^{-1}(A^3 - 2A^2 - 3E) = 0 \Rightarrow A^2 - 2A - 3A^{-1} = 0$

$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{3}A^2 - \frac{2}{3}A$

$A(A^3 - 2A^2 - 3E) = 0 \Rightarrow A^4 - 2A^3 - 3A = 0$

$\Rightarrow A^4 = 2A^3 + 3A. \quad \square$

2. 设域 F 上 m 阶方阵 A 和 n 阶方阵 B 的特征多项式互素, 求证: $F^{m \times n}$ 上的线性变换 $\mathcal{A}: X \mapsto AX - XB$ 可逆.

证: 要证 $\mathcal{A}$ 可逆, 即证 $\mathcal{A}$ 即单又满.

单: $\forall X \in \ker(\mathcal{A}) \quad AX - XB = 0 \Rightarrow AX = XB$

$\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k X = X B^k \quad (\text{归纳法})$

则 $\forall f(t) \in F[t], \Rightarrow f(A)X = Xf(B)$

取 $f(t)$ 为 A 的特征多项式 $f_A(t)$ 则有 $f_A(A) = 0$

$\Rightarrow X f_A(B) = 0$, 因为 A 和 B 的特征多项式互素, 设 g_B 为 B 的特征多项式
所以 $\gcd(f_A(t), g_B(t)) = 1 \Rightarrow \exists u(t), v(t) \in F[t], s.t.$

$$u(t) f_A(t) + v(t) g_B(t) = 1, \text{ 从而}$$

$$u(B) f_A(B) + v(B) g_B(B) = E \Rightarrow u(B) f_A(B) = E$$

$\Rightarrow f_A(B)$ 可逆

所以有 $X = 0 \Rightarrow A$ 单.

又因为 $\dim(\ker(A)) + \dim(\operatorname{im}(A)) = \dim(F^{m \times n})$

$$\text{而 } \dim(\ker(A)) = 0 \Rightarrow \dim(\operatorname{im}(A)) = \dim(F^{m \times n})$$

$$\text{又 } \operatorname{im}(A) \subseteq F^{m \times n}, \therefore \operatorname{im}(A) = F^{m \times n}$$

$\Rightarrow A$ 满.

单, 有限维线性空间上的线性变换, 单 $\Leftrightarrow$ 满 $\Leftrightarrow$ 双射

错误: $X \in \ker(A)$ $AX = XB$ 必定是 B 属于 λ 的特征向量.

$$\Rightarrow \underline{AX} \vec{v} = X B \vec{v} = X \lambda \vec{v} = \underline{\lambda \cdot X \vec{v}}$$

若 $X \vec{v} \neq 0$ 则 $X \vec{v}$ 是 A 的属于 λ 的特征向量

λ 为 A 特征值 $\rightarrow \infty \Rightarrow X \vec{v} = 0 \neq X = 0$

3. 求 $\mathbb{C}$ 上三阶矩阵

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 7 & 25 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

的 Jordan 标准型.

解: $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 7 & 25 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix} \quad \lambda E - A = \begin{pmatrix} \lambda+1 & -2 & -6 \\ -1 & \lambda-7 & -25 \\ 0 & 2 & \lambda+7 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} |\lambda E - A| &= (\lambda+1)((\lambda-7)(\lambda+7) + 50) + 1 \cdot (-2(\lambda+7) - 2 \times (-6)) \\ &= (\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1) - 2\lambda - 2 \\ &= \lambda^3 + \lambda^2 - \lambda - 1 = (\lambda+1)^2(\lambda-1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow -1$ 的代数重数为 2, 1 的代数重数为 1.

$$\text{rank}(A - (-1) \cdot E) = \text{rank}(-E - A) = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -6 \\ -1 & -8 & -25 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} = 2$$

$n - \text{rank}(A - (-1) \cdot E) = 1$, 几何重数为 1, 所以有 1 个关于 -1 的 Jordan 块

所以 A 的 Jordan 标准型为 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

□

4. 设复方阵 A 的特征多项式为

$$\chi_A = (t-1)^4(t+1)^3t^2,$$

极小多项式为

$$\mu_A = (t-1)^2(t+1)^3t.$$

再设 $\text{rank}(A - E) = 7$. 试计算 J_A .

证: λ 在极小多项式中的重数等于 J_A 中关于 λ 的 Jordan 块出现的最
大阶数.

解: 1 的代数重数为 9, 所以在对角线上出现 9 次,

在极小多项式中的重数为 2, 所以关于 1 的 Jordan 块阶数最大为 2.

$$\therefore \text{rank}(A-E)=7, \quad n-\text{rank}(A-E)=9-7=2.$$

所以关于 1 的 Jordan 块出现 2 次 $\Rightarrow \varphi=2+2$

同理 -1 出现 3 次, -3 出现 3 次

-1 出现 3 次, -3 出现 3 次

$\Rightarrow$ 关于 1 的 3 阶 Jordan 块出现 1 次

0 代数重数 2, 又出现在 2 次 $\Rightarrow$ 关于 0 的 1 阶 Jordan 块出现

2 次, 阶数最大为 1 两次

$$\begin{pmatrix} J_2(1) & & & & \\ & J_2(1) & & & \\ & & J_3(-1) & & \\ & & & J_1(0) & \\ & & & & J_1(0) \end{pmatrix}$$

□

5. (选做) 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$. 证明: $\text{tr}(A^k) = 0, k = 1, 2, \dots, n$ 当且仅当 A 是幂零矩阵.

证: $(\Rightarrow)$ 设 $\chi_A = t^n (t-\lambda_1)^{n_1} \dots (t-\lambda_s)^{n_s}$, 其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 两两不同,

$n_1, n_2, \dots, n_s \in \mathbb{N}$, 则 $\exists P \in GL_n(\mathbb{C})$ 使 $P^{-1}AP = J_A$, 其中 J_A 为 A 的

Jordan 标准型

$$J_A = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} n_0 \\ \vdots \\ \lambda_1 \end{matrix} & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ \lambda_1 \end{matrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \begin{matrix} \lambda_s & \dots & \lambda_s \end{matrix} & \begin{matrix} n_s \\ \vdots \\ \lambda_s \end{matrix} & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ \lambda_s \end{matrix} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow J_A^k = \begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & \dots & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} n_0 \\ \vdots \\ \lambda_1^k \end{matrix} & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ \lambda_1^k \end{matrix} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \begin{matrix} \lambda_s^k & \dots & \lambda_s^k \end{matrix} & \begin{matrix} n_s \\ \vdots \\ \lambda_s^k \end{matrix} & \begin{matrix} * \\ \vdots \\ \lambda_s^k \end{matrix} \end{pmatrix}$$

trace 是相似不变量, $\therefore \text{tr}(J_A^k) = \text{tr}(A^k) = 0$

$$\Rightarrow n_1 \cdot \lambda_1^k + \dots + n_s \cdot \lambda_s^k = 0, \quad k=1, 2, \dots, n, \quad \text{其中 } s \leq n$$

所以有

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_s \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_s^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^s & \lambda_2^s & \dots & \lambda_s^s \end{pmatrix}}_B \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ \vdots \\ n_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_s \cdot \det \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_s \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{s-1} & \lambda_2^{s-1} & \dots & \lambda_s^{s-1} \end{pmatrix}}_C$$

$$\because \det(C) \neq 0, \quad \therefore \det(B) \neq 0, \quad \Rightarrow n_1 = \dots = n_s = 0$$

$$\therefore \chi_A(t) = t^{n_0} = t^n \Rightarrow A^n = 0 \Rightarrow A \text{ 幂零.}$$

$\Leftarrow$ 若 A 幂零, 则 A 的极小多项式为 t^m , $m \in \mathbb{N}$,
所以 A 的特征值只有 0, 从而 $T_A = \begin{pmatrix} 0 & & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

$$\text{tr}(A^k) = \text{tr}(T_A^k) = 0.$$

□