1. 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\in \mathrm{M}_3(\mathbb{R}).$$

把 A^{-1} 和 A^4 表示为 A^0, A, A^2 和 $\overset{n}{A^3}$ 的线性组合.

解: $\chi_A(t)=\det(tE-A)=t^3-2t^2-3$

由 Hamilton-Cayley 定理得: $A^3-2A^2-3E=0 \Rightarrow A\left[\frac{1}{3}(A^2-2A)\right]=E$

$\Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{3}(A^2-2A)$ $\longrightarrow$ A可逆当且仅当 μ_A 的常数项非零.

$\Uparrow$

χ_A 的常数项非零

由欧几里得除法可得: $t^4=(t+2)(t^3-2t^2-3)+4t^2+3t+6$.
(多项式的带余除法)

$\Rightarrow A^4=(A+2E)(A^3-2A^2-3E)+4A^2+3A+6E$

$=4A^2+3A+6E.$

$\forall \lambda\in\mathbb{R}\quad \lambda\circ A=A\circ\lambda$

计算问题:

$$\begin{vmatrix}t-1 & -1 & 1\\ -2 & t-1 & 0\\ -1 & 1 & t\end{vmatrix}=(-2+t-1)+t\cdot(t^2-2t+1-2)$$

$$=t-3+t^3-2t^2-t=t^3-2t^2-3$$

思考: 如何计算 A^n. 待定系数法

2. 设域 F 上 m 阶方阵 A 和 n 阶方阵 B 的特征多项式互素, 求证: $F^{m\times n}$ 上的线性变换 $\mathcal{A}$: $X \mapsto AX - XB$ 可逆.

证明: $\mathcal{A}$ 是 $m\times n$ 维线性空间 V 的线性变换.

设 $\mathcal{A}X = AX - XB = O_{m\times n}$ 要证 $X = O_{m\times n}$.

由 $AX = XB$ 可得 $A^2X = AXB = XB^2$,

若 $i\in\mathbb{Z}^*$ $A^iX = XB^i$ 则 $A^{i+1}X = A^iXB = XB^{i+1}$.

$\forall k\in\mathbb{Z}^*$. $A^kX = XB^k$

$\forall f(t)\in F[t]$. $f(A)X = Xf(B)$.

取 $f(t) = \varphi_B(t)$ 则 $f(B) = O_{n\times n}$. $\Rightarrow f(A)\cdot X = O_{m\times n}$

∵ $\gcd(\varphi_A(t), \varphi_B(t)) = 1$

∴ $\exists u, v\in F[t]$ s.t. $u(t)\cdot\varphi_A(t) + v(t)\cdot\varphi_B(t) = 1$

$u(A)\cdot\varphi_A(A) + v(A)\cdot\varphi_B(A) = E \Rightarrow v(A)\cdot\varphi_B(A) = E$

∴ $\det(\varphi_B(A)) \neq 0. \Rightarrow X = O_{m\times n}$. ← X 的每一列均为 $f(A)\vec{x} = \vec{0}$ 的解.

线性变换 $\mathcal{A}$ 是单射. 又因为原像集和像集的维数相等.

综上, $\mathcal{A}$ 是双射. $\mathcal{A}$ 是可逆的线性映射. □.

所有作用在复的向量空间的线性算子一定有特征向量.

若 χ_A 在 F 中无根, 则 A 在 F 中没有特征根.

注: 设 λ 是 B 的特征值. λ 不一定属于 F.

$\vec{v}$ 是对应的特征向量. $\vec{v}\neq\vec{0}$

$AX\vec{v} = XB\vec{v} = \lambda X\vec{v}$

$X\vec{v}\neq\vec{0}$? 无法得到 $X\vec{v}$ 是 A 的特征向量.

3. 求 $\mathbb{C}$ 上三阶矩阵

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 7 & 25 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}$$

的 Jordan 标准型.

解、$\chi_A(t) = \det(tE-A) = (t+1)^2 \cdot (t-1)$

$$tE-A = \begin{pmatrix} t+1 & -2 & -6 \\ -1 & t-7 & -25 \\ 0 & 2 & t+7 \end{pmatrix}$$

$\operatorname{rank}(-E-A) = 2$，$\operatorname{rank}(E-A) = 2$.

分别蕴含、$\lambda=-1$ 的几何重数为 1，$\lambda=1$ 的几何重数为 1.

故A的若当标准型为：$J_A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4. 设复方阵 A 的特征多项式为

$$\chi_A = (t-1)^4(t+1)^3t^2,$$

极小多项式为

$$\mu_A = (t-1)^2(t+1)^3t.$$

再设 $\operatorname{rank}(A-E)=7$. 试计算 J_A.

解：由 χ_A 和 μ_A 可知 J_A 中关于 $\lambda=1$ 的若当块出现的最大阶数为 2.

J_A 中关于 $\lambda=-1$ 的若当块出现的最大阶数为 3,

J_A 中关于 $\lambda=0$ 的若当块出现的最大阶数为 1.

又由 $\operatorname{rank}(A-E)=7$ 可知 J_A 中关于 $\lambda=1$ 的若当块有2个.

综合上述：

$$J_A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & -1 & 1 & & & \\ & & & & & -1 & 1 & & \\ & & & & & & -1 & & \\ & & & & & & & 0 & \\ & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad J_A = \operatorname{diag}(J_2(1), J_2(1), J_3(-1), J_1(0), J_1(0))$$

μ_A 中 $t-\lambda$ 的重数是关于 λ 的若当块的最大阶数.

5. (选做) 设 $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$. 证明: $\mathrm{tr}(A^k) = 0, k = 1, 2, \ldots, n$ 当且仅当 A 是幂零矩阵.

证明: 设 $\mathrm{spec}_{\mathbb{C}}(A) = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_m\}$. $\chi_A(t) = \prod_{i=1}^{m} (t-\lambda_i)^{d_i}$

$A \sim_s B \ \forall f \in F[t]. \ f(A) \sim_s f(B)$

$\forall \ell \in \mathbb{Z}^+ \quad J_\ell(\lambda_i)^k = \begin{pmatrix} \lambda_i^k & & * \\ & \ddots & \\ & & \lambda_i^k \end{pmatrix}$

trace是相似不变量 $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

$\mathrm{tr}(P^{-1}AP) = \mathrm{tr}(P^{-1}PA) = \mathrm{tr}(A)$.

由 $\mathrm{tr}(A^k)=0$. $k=1,\cdots,n$ 可得:

$$\begin{cases} d_1\lambda_1 + \cdots + d_m\lambda_m = 0 \\ d_1\lambda_1^2 + \cdots + d_m\lambda_m^2 = 0 \\ \quad\vdots \\ d_1\lambda_1^n + \cdots + d_m\lambda_m^n = 0 \end{cases}, \text{ 其中 } m \le n. \ d_1 + \cdots + d_m = n. \ n_i \geq 1 \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1\lambda_1 \\ d_2\lambda_2 \\ \vdots \\ d_m\lambda_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

由Vandermonde行列式可得. 将 $(d_1\lambda_1, d_2\lambda_2, \cdots, d_m\lambda_m)^t$ 看作齐次线性方程组的解. 一定是零解.

故 $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$.

$\therefore \chi_A(t) = t^n$. A 是幂零矩阵.

下面证明反方向: 若 A 是幂零矩阵. $\exists k \in \mathbb{N}^+$ s.t. $A^k = 0$. 则由 Hamilton-Cayley 定理可知: $\chi_A(t) = t^n$.

A 只有特征值 0. 故 $\forall k = 1, \cdots, n$. $\mathrm{tr}(A^k) = \sum_{i=1}^{m} n_i \cdot \lambda_i^k = 0$. $\square$.

$\lambda_1^2 + \cdots + \lambda_n^2 = 0 \xRightarrow{\lambda_i \in \mathbb{R}} \lambda_i = 0 \ \forall i \qquad \mathbb{C}: \ i^2 + 1^2 = 0.$

复习Vandermonde行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & \cdots & x_n-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & \cdots & x_n(x_n-x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2-x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{vmatrix} = \prod_{i>1}(x_i-x_1)\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

问题：若 $J_A = \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_m}(\lambda_m) \end{pmatrix}$，问：$J_{A^k} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} J_{n_1}(\lambda_1^k) & & \\ & \ddots & \\ & & J_{n_m}(\lambda_m^k) \end{pmatrix}$，$k\in\mathbb{N}^+$.

"形状"会发生改变吗？

等号不一定成立.

e.g. $J_5(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$ $B = J_5^2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & \\ & 0 & 0 & 1 & \\ & & 0 & 0 & 1 \\ & & & 0 & 0 \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \sim_s \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$

B 有唯一特征值 $\lambda=0$，$r_0=5$

$r_1=\mathrm{rank}(B)=3$，$r_2=\mathrm{rank}(B^2)=\mathrm{rank}(J_5^4(0))=1$. $r_3=\mathrm{rank}(B^3)=0$.

$n_1= r_0+r_2-2r_1=0$，$n_2=r_1+r_3-2r_2=1$. $n_3=1+0-2\times0=1$.