

初等因子:

1. 定义: 设 $A \in \mathbb{C}(V)$

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_k \quad (1)$$

是 V 的 A -不变子空间的直和分解. 令 $A_i = A|_{W_i}$

和 $d_i = \dim W_i$. 重集 $\{d_1, \dots, d_k\}$ 称为 A 关于 (1) 的初等因子组.

注: 初等因子组是唯一的.

2. Jordan 标准型与初等因子组的关系.

当 $F = \mathbb{C}$ 时, 初等因子组唯一确定 Jordan 标准型, Jordan 标准型也唯一确定初等因子组.

命题: 设 $A \in \mathbb{C}(V)$. 且 A 的 Jordan 标准型为

$$J_A = \begin{pmatrix} J_{d_1}(\lambda_1) & & \\ & J_{d_2}(\lambda_2) & \\ & & \ddots \\ & & & J_{d_k}(\lambda_k) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}, \\ d_1, \dots, d_k \in \mathbb{N} \\ \text{它们有不必两两不同.} \end{array}$$

$\Leftrightarrow A$ 的初等因子组为 $\{(t-\lambda_1)^{d_1}, (t-\lambda_2)^{d_2}, \dots, (t-\lambda_k)^{d_k}\}$

例: $J_A = \begin{pmatrix} \boxed{2} & \boxed{1} & & \\ 1 & 0 & \boxed{2} & \\ & \boxed{2} & \boxed{1} & \\ & 1 & 0 & \boxed{2} \\ & & & \boxed{3} & \boxed{1} \\ & & & & \boxed{3} & \boxed{1} \\ & & & & & \boxed{3} & \boxed{1} \\ & & & & & & \boxed{3} \end{pmatrix}$

则 A 的初等因子组为

$$\{(t-2)^2, (t-2)^2, (t-3)^3, t-3\}$$

初等因子组与 μ_A , χ_A 的关系. 设 A 的初等因子组是 $\{q_1, \dots, q_k\}$ 则

$$\chi_A = q_1 q_2 \dots q_k, \quad \mu_A = \text{Lcm}\{q_1, q_2, \dots, q_k\}$$

4. 当 $F = \mathbb{C}$ 时, 给定矩阵 A , 一般如何求初等因子组.

(1) 求特征多项式 χ_A , 在 $\mathbb{C}[t]$ 中分解 χ_A , 得到

$$\chi_A = (t - \lambda_1)^{k_1} \dots (t - \lambda_s)^{k_s}$$

(2) 记 $N(i, l)$, $l=1, \dots, k_i$ 为 $(t - \lambda_i)^l$ 在初等因子组中的重数

即在初等因子组中出现的次数, 如上例.

$(t-2)^2$ 在初等因子组中的重数为 2, 设 $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$

$$\text{则 } N(1, 2) = 2, \quad N(1, 1) = 0$$

$$N(2, 3) = 1, \quad \because (t-3)^3 \text{ 出现 1 次}$$

↓
对应特征值 $\lambda_2 = 3$

$$\text{则 } N(i, l) = r(i, l+1) + r(i, l-1) - 2r(i, l)$$

$$\text{其中 } r(i, j) = \text{rank}((A - \lambda_i E)^j)$$

给定 $\chi_A(t)$ = 所有初等因子的乘积 求初等因子组.

例: 作业题 1.

1. 计算下列二阶复矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix}$$

的 Jordan 标准型 (提示: 需要对 λ_1, λ_2 的取值分情况讨论).

解: $|tE - A| = \begin{vmatrix} t - \lambda_1 & -1 \\ 0 & t - \lambda_2 \end{vmatrix} = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)$

若 $\lambda_1 = \lambda_2$ 则 λ_1 的代数重数为 2.

$$\text{rank}(\lambda E - A) = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

所以有 $2 - 1 = 1$ 个 λ_1 的 Jordan 块, $\therefore J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$

若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 则 λ_1 的代数重数为 1, λ_2 的代数重数为 1.

$$\Rightarrow J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |tE - B| &= \begin{vmatrix} t & -1 \\ \lambda_1\lambda_2 & t - (\lambda_1 + \lambda_2) \end{vmatrix} = t(t - (\lambda_1 + \lambda_2)) + \lambda_1\lambda_2 \\ &= t^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)t + \lambda_1\lambda_2 \\ &= (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \end{aligned}$$

若 $\lambda_1 = \lambda_2$ 则 λ_1 的代数重数为 2

$$\lambda_1 E - B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -1 \\ \lambda_1\lambda_2 & -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & -1 \\ \lambda_1^2 & -\lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\text{rank}(\lambda_1 E - B) = 1$, 则 λ_1 的几何重数为 1, 关于 λ_1 的 Jordan 块有 $2 - 1 = 1$ 个

$$\Rightarrow J_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, 则 λ_1, λ_2 的代数重数均为 1

$$\Rightarrow J_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \square$$

2. 设 A 是复数域上的方阵.

(a) 已知 $\chi_A(t) = (t-3)^4(t+2)$ 且 $\text{rank}(A-3E) = 2$. 求 J_A ;

(b) 在 $\text{rank}(A-3E) = 1, 3, 4$ 的情形, 能唯一地求出 J_A 吗?

解: (a) 3 的代数重数为 4, -2 的代数重数为 1

$\therefore \text{rank}(A-3E)=2 \Rightarrow$ 关于 3 的 Jordan 块有 $5-2=3$ 个

$$4=2+1+1$$

$$\therefore J_A = \begin{pmatrix} J_2(3) & & \\ & J_1(3) & \\ & & J_1(1) \\ & & & J_1(-2) \end{pmatrix}$$

(b) 当 $\text{rank}(A-3E)=1$, $\Rightarrow$ 关于 3 的 Jordan 块有 $5-1=4$ 个

$$4=1+1+1+1$$

唯一确定, $J_A = \begin{pmatrix} J_1(3) & & & \\ & J_1(3) & & \\ & & J_1(1) & \\ & & & J_1(3) \\ & & & & J_1(-2) \end{pmatrix}$

当 $\text{rank}(A-3E)=3$, $\Rightarrow$ 关于 3 的 Jordan 块有 $5-3=2$ 个

$$4=2+2=3+1$$

不能唯一确定, $J_A = \begin{pmatrix} J_2(3) & & \\ & J_2(3) & \\ & & J_1(-2) \end{pmatrix}$ 或 $J_A = \begin{pmatrix} J_3(3) & & \\ & J_1(3) & \\ & & J_1(-2) \end{pmatrix}$

当 $\text{rank}(A - I) = 4$, $\Rightarrow$ 互异的 Jordan 块有 $5 - 4 = 1$ 个

唯一块是 $J_A = \begin{pmatrix} J_5(1) \\ J_1(-2) \end{pmatrix}$ □

3. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$,

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) 验证矩阵 A 和 B 有相同的特征多项式;

(b) 求出它们的极小多项式;

(c) 计算它们的初等因子组;

(d) 求出它们的 Jordan 标准型.

解: (a): $|tE - A| = \begin{vmatrix} t-6 & -2 & 2 \\ 2 & t-2 & -2 \\ -2 & -2 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)(t-4)^2$

$$|tE - B| = \begin{vmatrix} t-6 & -2 & -2 \\ 2 & t-2 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)(t-4)^2$$

(b) $\mu_A | \chi_A$, 且 μ_A 和 χ_A 有相同的不可约因子.

验证可得 $(A-2E)(A-4E)=0$, 所以 $\mu_A = (t-2)(t-4)$

$\mu_B | \chi_B$ 验证可得 $\mu_B = (t-2)(t-4)^2$

(c): 法一:

或有互异 Jordan 标准型 $\because \mu_A = (t-2)(t-4)$ 或 $(t-2)(t-4)^2$

而 $t-4$ 的重数化着在 A 中互异的 Jordan 块的最大阶数

事实: 极小多项式等于所有初等因子的最大阶数, $\therefore$ 可以推出 $\mu_A = (t-2)(t-4)$

特征多项式等于所有初等因子的乘积.

所以 A 的初等因子组为 $\{t-2, t-4, t-4\}$

B 的初等因子组为 $\{t-2, (t-4)^2\}$

法二: $t-2$ 在 λ_A 中重数为1 所以 -1 以及 $t-2$ 出现在初等因子组中.

当特征值为4时, 计算

$$\text{rank}(A - 4E) = 1, \quad \text{rank}(A - 4E)^0 = 3.$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = 4$$

$$\text{rank}((A - 4E)^2) = 1$$

$$\text{所以 } N(2, 1) = \text{rank}((A - 4E)^2) + \text{rank}(A - 4E)^0 - 2\text{rank}(A - 4E) = 2$$

这里 $N(2, 1): (t - \lambda)^1 = (t - 4)^1$ 在初等因子组中的重数.

所以 $t - 4$ 在初等因子组中出现两次.

同理, 对矩阵 B $t-2$ 在 λ_B 中重数为1, 所以在初等因子组中
出现一次. $\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 4$

当特征值为4时, 计算

$$\text{rank}((B - 4E)^0) = 3, \quad \text{rank}(B - 4E) = 2 \quad \text{rank}((B - 4E)^2) = 1$$

$$\text{rank}((B - 4E)^3) = 1$$

$$\text{所以 } N(2, 1) = \text{rank}((B - 4E)^2) + \text{rank}((B - 4E)^0) - 2\text{rank}(B - 4E) = 1 + 3 - 2 \times 2 = 0$$

$\downarrow$
 $(t - 4)^1$ 在初等因子组中的重数

$$N(2, 2) = \text{rank}((B - 4E)^2) + \text{rank}((B - 4E)^3) - 2\text{rank}((B - 4E)^2) = 1$$

$\downarrow$
 $(t - 4)^2$ 在初等因子组中的重数

□

证三：先计算 Jordan 标准型：

$$J_A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \because \chi_A = (t-2)(t-4)^2$$

$$\text{rank}(A - 4E) = 1 \Rightarrow n - \text{rank}(A - 4E) = 2$$

$$J_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \because \chi_B = (t-2)(t-4)^2$$

$$\text{rank}(B - 4E) = 2 \Rightarrow n - \text{rank}(B - 4E) = 1$$

□

4. 计算 $J_n(\lambda)$ 的极小多项式, 特征多项式和 $J_n(\lambda)^k$, 其中 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, k \in \mathbb{N}$.

解： $J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$

$$\chi_{J_n(\lambda)} = (t-\lambda)^n \quad \mu_{J_n(\lambda)} = (t-\lambda)^n$$

$$J_n(\lambda)^k = (\lambda E_n + J_n(0))^k$$

$$= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (\lambda E_n)^{k-i} (J_n(0))^i$$

$$= \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \lambda^{k-i} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

↑ $i+1$ 列

$$\begin{aligned}
 \text{所以当 } k \leq n-1 \text{ 时 } J_n(\lambda)^k &= \sum_{i=0}^k \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \binom{k}{i} \lambda^{k-i} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \binom{k}{i} \lambda^{k-i} \\ & & & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \lambda^k & & 0 \\ & \ddots & \\ & & \lambda^k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & k\lambda^{k-1} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & k\lambda^{k-1} \\ & & & 0 \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} 0 & & & k+1\lambda^{k-1} \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \cdots & 1 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & k\lambda^{k-1} \\ & & & \lambda^k \end{pmatrix} \\
 k \geq n \text{ 时 } J_n(\lambda)^k &= \begin{pmatrix} \lambda^k & \cdots & \binom{k}{n-1} \lambda^{k-(n-1)} \\ & \ddots & \vdots \\ & & \lambda^k \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

□

5. 计算 $J_n(\lambda)^k$ 的 Jordan 标准型, 其中 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, k \in \mathbb{N}$.

设 $A = J_n(\lambda)^k$ 则 $\chi_A = (t - \lambda^k)^n$, i.e. λ^k 是 A 的唯一特征值

$$\therefore \text{rank}(A - \lambda^k E) = \text{rank} \begin{pmatrix} 0 & k\lambda^{k-1} & & * \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & k\lambda^{k-1} \\ & & & 0 \end{pmatrix} = n-1$$

$\therefore \lambda^k$ 的几何重数为 1, $\Rightarrow T_A$ 只有 1 个 Jordan 块, 即 $T_A = J_n(\lambda^k)$.
 $\square$