

2025年春季学期第十四周作业

1. 计算下列二阶复矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix}$$

的 Jordan 标准型 (提示: 需要对 λ_1, λ_2 的取值分情况讨论).

2. 设 A 是复数域上的方阵.

(a) 已知 $\chi_A(t) = (t-3)^4(t+2)$ 且 $\text{rank}(A-3E) = 2$. 求 J_A ;

(b) 在 $\text{rank}(A-3E) = 1, 3, 4$ 的情形, 能唯一地求出 J_A 吗?

3. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$,

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) 验证矩阵 A 和 B 有相同的特征多项式;

(b) 求出它们的极小多项式;

(c) 计算它们的初等因子组;

(d) 求出它们的 Jordan 标准型.

4. 计算 $J_n(\lambda)$ 的极小多项式, 特征多项式和 $J_n(\lambda)^k$, 其中 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, k \in \mathbb{N}$.

5. 计算 $J_n(\lambda)^k$ 的 Jordan 标准型, 其中 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, k \in \mathbb{N}$.

1. 计算下列二阶复矩阵

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\lambda_1\lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix}$$

的 Jordan 标准型 (提示: 需要对 λ_1, λ_2 的取值分情况讨论).

解: 计算 A 的 Jordan 标准型:

$$\chi_A(t) = |tE - A| = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)$$

若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 则 A 有两个不同的特征根. 故 $J_A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

若 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 则由 $\text{rank}(\lambda E - A) = 1$ 得 A 有一个关于 λ 的 Jordan 块.

$$J_A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix} \quad \text{注: 此时 } A \text{ 本身即为 Jordan 标准型.}$$

$$\text{计算 } B \text{ 的 Jordan 标准型: } \chi_B(t) = \begin{vmatrix} t & -1 \\ \lambda_1\lambda_2 & t - \lambda_1 - \lambda_2 \end{vmatrix} = t^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)t + \lambda_1\lambda_2 = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)$$

若 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 则 B 有两个不同的特征根. 故 $J_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ \lambda^2 & -\lambda \end{pmatrix}$$

若 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ 则由 $\text{rank}(\lambda E - B) = 1$ 故 B 有一个关于 λ 的 Jordan 块 即 $J_B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix}$

2. 设 A 是复数域上的方阵.

(a) 已知 $\chi_A(t) = (t-3)^4(t+2)$ 且 $\text{rank}(A-3E) = 2$. 求 J_A ;

(b) 在 $\text{rank}(A-3E) = 1, 3, 4$ 的情形, 能唯一地求出 J_A 吗?

解: (a) $A \in \mathbb{C}^{5 \times 5}$, $\text{spec}_{\mathbb{C}}(A) = \{-2, 3\}$.

J_A 有 1 个关于 $\lambda = -2$ 的 Jordan 块.

$\because \text{rank}(A-3E) = 2 \wedge J_A$ 有 $5-2=3$ 个关于 $\lambda=3$ 的 Jordan 块.

结合 A 的阶数, J_A 有 $J_1(3), J_1(3), J_2(3)$ 关于 $\lambda=3$ 的 Jordan 块.

$$J_A = \begin{pmatrix} J_1(3) & & & & \\ & J_1(3) & & & \\ & & J_2(3) & & \\ & & & J_1(-2) & \end{pmatrix}$$

(b) 当 $\text{rank}(A-3E) = 1$ 时, J_A 有 4 个关于 $\lambda=3$ 的 Jordan 块. 此时 $J_A = \begin{pmatrix} 3 & & & & \\ & 3 & & & \\ & & 3 & & \\ & & & 3 & \\ & & & & -2 \end{pmatrix}$, 可唯一确定.

当 $\text{rank}(A-3E) = 3$ 时, J_A 有 2 个关于 $\lambda=3$ 的 Jordan 块

$$\text{此时 } J_A = \begin{pmatrix} J_2(3) & & \\ & J_2(3) & \\ & & J_1(-2) \end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix} J_1(3) & & \\ & J_3(3) & \\ & & J_1(-2) \end{pmatrix}$$

当 $\text{rank}(A-3E) = 4$ 时 J_A 有 1 个关于 $\lambda=3$ 的 Jordan 块,

$$\text{此时 } J_A = \begin{pmatrix} J_4(3) & \\ & J_1(-2) \end{pmatrix}, \text{ 可唯一确定.}$$

3. 设 $A, B \in M_n(\mathbb{C})$,

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) 验证矩阵 A 和 B 有相同的特征多项式:

(b) 求出它们的极小多项式;

(c) 计算它们的初等因子组;

(d) 求出它们的 Jordan 标准型.

解: (a) $\chi_A(t) = \begin{vmatrix} t-6 & -2 & 2 \\ 2 & t-2 & -2 \\ -2 & -2 & t-2 \end{vmatrix} = (t-6)(t^2-4t) + 2(2t-4-4) + 2(-4+2t-4)$

$$= t^3 - 4t^2 - 6t^2 + 24t + 4t - 16 + 4t - 16$$
$$= t^3 - 10t^2 + 32t - 32$$

$$\chi_B(t) = \begin{vmatrix} t-6 & -2 & -2 \\ 2 & t-2 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = (t-6)(t-2)^2 + 4(t-2) = t^3 - 4t^2 + 4t - 6t^2 + 24t - 24 + 4t - 8$$
$$= t^3 - 10t^2 + 32t - 32.$$

$$\chi_A(t) = \chi_B(t) = (t^2 - 8t + 16)(t-2) = (t-4)^2(t-2).$$

(b) 由 Hamilton-Cayley 定理可知: $\mu_A(t) \mid \chi_A(t)$, 且 $(t-4)(t-2) \mid \mu_A(t)$

$\mu_B(t) \mid \chi_B(t)$. 且 $(t-4)(t-2) \mid \mu_B(t)$

$$\text{检查可知: } (A-4E)(A-2E) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故 $\mu_A(t) = (t-4)(t-2)$.

$$(B-4E)(B-2E) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 \\ -4 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

故 $\mu_B(t) = (t-4)^2(t-2)$

或者分析几何重数.

(c) A 的初等因子组为: $\{t-4, t-4, t-2\}$

B 的初等因子组为: $\{(t-4)^2, t-2\}$.

Jordan 标准型中所有 Jordan 子块对应的极小多项式的集合.

$$(d) \quad J_A = \begin{pmatrix} J_1(4) & & \\ & J_1(4) & \\ & & J_1(2) \end{pmatrix}, \quad J_B = \begin{pmatrix} J_2(4) & & \\ & & J_1(2) \end{pmatrix}$$

4. 计算 $J_n(\lambda)$ 的极小多项式, 特征多项式和 $J_n(\lambda)^k$, 其中 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, k \in \mathbb{N}$.

解: $\chi_{J_n(\lambda)}(t) = \mu_{J_n(\lambda)}(t) = (t-\lambda)^n$

记 $J_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}_{n \times n}$ 则 $J_n(\lambda) = \lambda E + J_n(0)$.

注意到: 当 $k \geq n$ 时 $J_n(0)^k = 0$. 当 $k < n-1$ 时, $J_n(0)^k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$ 第 $k+1$ 列 当 $k = n-1$ 时, $J_n(0)^k = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \vdots \\ & & 0 \end{pmatrix}$

$$J_n(\lambda)^k = (\lambda E_n + J_n(0))^k = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \lambda^{k-i} J_n(0)^i$$

$$= \lambda^k E_n + k \lambda^{k-1} J_n(0) + \cdots + k \lambda J_n(0)^{k-1} + J_n(0)^k$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \cdots & k\lambda & 1 & \cdots & 0 \\ & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & k\lambda^{k-1} \\ & & & & \ddots & \ddots & \lambda^k \end{pmatrix}, \text{ 当 } k < n-1 \text{ 时};$$

$$\begin{pmatrix} \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \cdots & \binom{k}{n-1} \lambda^{k-n+1} \\ & \lambda^k & k\lambda^{k-1} & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & k\lambda^{k-1} \\ & & & & \lambda^k \end{pmatrix} \text{ 当 } k \geq n-1 \text{ 时},$$

5. 计算 $J_n(\lambda)^k$ 的 Jordan 标准型, 其中 $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, k \in \mathbb{N}$.

解: 由第4题知 $\chi_{J_n(\lambda)^k}(t) = (t - \lambda^k)^n$, 故 $J_n(\lambda)^k$ 只有特征值 λ^k .

$$\because \lambda \neq 0 \quad \therefore \operatorname{rank}(J_n(\lambda)^k - \lambda^k E) = n-1$$

$\Rightarrow \lambda^k$ 的几何重数为 $n - (n-1) = 1$.

综上所述: $J_n(\lambda)^k$ 的 Jordan 标准型为 $J_n(\lambda^k)$.

命题: $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \forall k \in \mathbb{Z}_{<0}, J_n(\lambda)^k$ 的 Jordan 标准型为 $J_n(\lambda^k)$.

证明. 结合上题只需说明 $k = -1$ 的情况即可

$$\text{设 } N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}, \text{ 则 } J_n(\lambda) = \lambda E_n + N.$$

$$J_n^{-1}(\lambda) = (\lambda E_n + N)^{-1} = \lambda^{-1} (E_n + \frac{1}{\lambda} N)^{-1}$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^{\infty} (-x)^i$$

$$= \lambda^{-1} [E_n - \lambda^{-1} N + \lambda^{-2} N^2 + \dots + (-1)^{n-1} \lambda^{-n+1} N^{n-1}]$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda^{-1} - \lambda^{-2} & \dots & (-1)^{n-1} \lambda^{-n} \\ & \lambda^{-1} - \lambda^{-2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & -\lambda^{-2} \\ & & & & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$$

回顾: $J_5^2(0) \sim_s \begin{pmatrix} J_3(0) \\ J_2(0) \end{pmatrix}$

例: 方阵 A 的特征值全为 1. $\Leftrightarrow A$ 与所有的 A^k 相似 (k 是正整数).

证明: " $\Rightarrow$ " 上题的推论.

" $\Leftarrow$ ". $\text{spec}_{\mathbb{C}} A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}$.

$\forall i \in \{1, \dots, m\}. \forall k \in \mathbb{N}^*. \lambda_i^k \in \text{spec}_{\mathbb{C}}(A^k) = \text{spec}_{\mathbb{C}}(A).$

由 $\lambda_i, \lambda_i^2, \lambda_i^3, \dots, \lambda_i^{m+1}$ 至多取 m 个不同的值.

故 $\exists p, q$ 其中 $p > q$. st. $\lambda_i^p = \lambda_i^q$, 设 $t_i = p - q$, $\lambda_i^{t_i} = 1$.

设 $t = \text{lcm}(t_1, \dots, t_m)$. $\lambda_1^t = \lambda_2^t = \dots = \lambda_m^t$

取 $k = t$ 得 $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 1$.

例: 设 n 阶可逆方阵 A 的极小多项式 $\mu_A(t)$ 等于它的特征多项式. 证明: A^{-1} 的极小多项式

$$\mu_{A^{-1}}(t) = \mu_A(0)^{-1} \cdot t^n \cdot \mu_A(t^{-1}).$$

证明: $J_A = \text{diag}(J_{n_1}(\lambda_1), \dots, J_{n_k}(\lambda_k))$ 其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 各不相同.

$$\chi_A(t) = \mu_A(t) = \prod_{i=1}^k (t - \lambda_i)^{n_i},$$

$$A = P^{-1} J_A P \Rightarrow A^{-1} = P^{-1} J_{A^{-1}} P.$$

$$J_{A^{-1}} = \text{diag}(J_{n_1}^{-1}(\lambda_1), \dots, J_{n_k}^{-1}(\lambda_k))$$

$$\forall i = 1, \dots, k$$

$$\begin{aligned} J_{n_i}^{-1}(\lambda_i) &= (\lambda_i E + N_i)^{-1} = \lambda_i^{-1} (E + \frac{1}{\lambda_i} N_i)^{-1} \\ &= \lambda_i^{-1} [E - \lambda_i^{-1} N_i + \lambda_i^{-2} N_i^2 + \dots + (-1)^{n_i-1} \lambda_i^{-(n_i-1)} N_i^{n_i-1}]. \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_i^{-1} - \lambda_i^{-2} & & (-1)^{n_i-1} \lambda_i^{-n_i} \\ & \lambda_i^{-1} - \lambda_i^{-2} & \\ & & \ddots \\ & & & -\lambda_i^{-2} \\ & & & & \lambda_i^{-1} \end{pmatrix}$$

$J_{n_i}^{-1}(\lambda_i)$ 的 Jordan 标准型为 $J_{n_i}(\lambda_i^{-1})$.

$$\begin{aligned} \mu_{A^{-1}}(t) &= \prod_{i=1}^k (t - \lambda_i^{-1})^{n_i} \\ \mu_A(0)^{-1} \cdot t^n \cdot \mu_A(t^{-1}) &= \frac{(-1)^n}{\prod_{i=1}^k \lambda_i^{n_i}} \cdot t^n \cdot \prod_{i=1}^k (\frac{1}{t} - \lambda_i)^{n_i} = \frac{(-1)^n}{\prod_{i=1}^k \lambda_i^{n_i}} \prod_{i=1}^k (1 - \lambda_i t)^{n_i} = \prod_{i=1}^k (t - \lambda_i^{-1})^{n_i}. \quad \square \end{aligned}$$

复习:

定理 11.10 设 $A \in \mathcal{L}(V)$, μ_A 在 $F[t]$ 中的两两互素首一的不可约因子是 $p_1, \dots, p_s$, 它们的次数分别是 $d_1, \dots, d_s$. 设 $\ell \in \mathbb{Z}^+$, $i \in \{1, 2, \dots, s\}$, $N(i, \ell)$ 是 p_i^ℓ 在 V 的某个 A -不可分子空间分解的初等因子组中的重数. 则

$$N(i, \ell) = \frac{1}{d_i} (R(i, \ell - 1) + R(i, \ell + 1) - 2R(i, \ell)),$$

其中 $R(i, j) = \text{rank}(p_i(\mathcal{A})^j)$, $j \in \mathbb{N}$. 特别地, 任何 A -不可分子空间分解初等因子组都相等 (称为 A 的初等因子组).

e.g.

$$A = \text{diag}(J_1(\lambda), J_2(\lambda), J_2(\lambda), J_3(\lambda)) = \begin{pmatrix} \lambda & & & & & \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \lambda & & & \\ & & & \lambda & 1 & \\ & & & & \lambda & \\ & & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & & \lambda & 1 \\ & & & & & & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \pi_A = (t - \lambda)^8, \quad \mu_A = (t - \lambda)^3$$

$$r_0 = 8$$

$$\downarrow 4 \geq 1 \text{ 阶 Jordan 块个数 } d_1 = r_0 - r_1$$

$$r_1 = \text{rank}(\lambda E - A) = 8 - 4 = 4$$

$$\downarrow 3 \geq 2 \text{ 阶 Jordan 块个数 } d_2 = r_1 - r_2$$

$$r_2 = \text{rank}(\lambda E - A)^2 = 0 + 0 + 0 + 1 = 1$$

$$\downarrow 1 \geq 3 \text{ 阶 Jordan 块个数 } d_3 = r_2 - r_3$$

$$r_3 = \text{rank}(\lambda E - A)^3 = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\downarrow 0 \geq 4 \text{ 阶 Jordan 块个数 } d_4 = r_3 - r_4$$

$$r_4 = 0$$

$$1 \text{ 阶若当块个数: } n_1 = d_1 - d_2 = r_0 + r_2 - 2r_1$$

$$2 \text{ 阶若当块个数: } n_2 = d_2 - d_3 = r_1 + r_3 - 2r_2$$

$$3 \text{ 阶若当块个数: } n_3 = d_3 - d_4 = r_2 + r_4 - 2r_3$$

补充习题: 1. 设 n 阶方阵 A 不可逆, 求证: $\text{rank } A = \text{rank } A^2$ 的充分必要条件为, A 的属于特征值 0 的初等因子都是 1 次的.

$$\text{证明: 设 } r_0 = n, r_1 = \text{rank } A < n, r_2 = \text{rank } A^2 < n$$

$$J_A \text{ 中属于特征值 } 0 \text{ 的 Jordan 块个数为 } n - \text{rank}(A) = n - r_1$$

$$J_A \text{ 的属于特征值 } 0 \text{ 的 } 1 \text{ 阶 Jordan 子块个数 } n_1 = r_0 + r_2 - 2r_1 = n + r_2 - 2r_1$$

$$\text{则 } r_1 = r_2 \Leftrightarrow n - r_1 = n_1 \Leftrightarrow A \text{ 的属于特征值 } 0 \text{ 的初等因子都是 } 1 \text{ 次的.}$$