1. 设 V 是 n 维欧式空间, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. 证明:

(a) $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$.

(b) 如果 $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$, 则 $(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \perp (\mathbf{u}-\mathbf{v})$.

(c) $(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = \frac{1}{4}\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2$.

(d) $\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta$, ($\theta$ 为 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 的夹角).

证明: (a) $\|u+v\|^2 = (u+v \mid u+v) = (u|u) + (u|v) + (v|u) + (v|v)$

$= \|u\|^2 + 2(u|v) + \|v\|^2$

$\|u-v\|^2 = (u-v \mid u-v) = (u|u) - (u|v) - (v|u) + (v|v)$

$= \|u\|^2 - 2(u|v) + \|v\|^2$

$\Rightarrow \|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$

(b) $(u+v \mid u-v) = (u|u) - (u|v) + (v|u) - (v|v)$

$= \|u\|^2 - \|v\|^2$

若 $\|u\| = \|v\|$, 则 $(u+v \mid u-v) = 0$.

(c). $\frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2$

$= \frac{1}{4}(\|u\|^2 + 2(u|v) + \|v\|^2) - \frac{1}{4}(\|u\|^2 - 2(u|v) + \|v\|^2)$

$= (u|v)$.

$\because$ 夹角 $\theta = \arccos\left(\frac{(x|y)}{\|x\|\|y\|}\right)$ $\therefore \cos\theta = \frac{(x|y)}{\|x\|\|y\|}$

(d). $\|u-v\|^2 = (u-v \mid u-v) = \|u\|^2 - 2(u|v) + \|v\|^2$

$= \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos\theta$ (θ 为 u, v 的夹角).

2. 设 $V = \mathbb{R}[x]_{<n+1}$. 对于 $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$, 规定

$$(f|g) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \frac{a_i b_j}{i+j+1}.$$

证明: $(\cdot|\cdot)$ 是 V 上的一个内积, 并求 Gram 矩阵 $\mathrm{G}(1, x, \ldots, x^n)$.

证：设 $h=\sum_{l=0}^{n} c_l x^l$，

则 $\alpha f+\beta g=\sum_{i=0}^{n}\alpha a_i x^i+\sum_{j=0}^{n}\beta b_j x^j=\sum_{i=0}^{n}(\alpha a_i+\beta b_i)x^i$

$\Rightarrow (\alpha f+\beta g|h)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{(\alpha a_i+\beta b_i)\cdot c_j}{i+j+1}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{\alpha a_i c_j+\beta b_i c_j}{i+j+1}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{\alpha a_i c_j}{i+j+1}+\frac{\beta b_i c_j}{i+j+1}\right)=\alpha(f|h)+\beta(g|h)$，同理可证 $(f|\alpha g+\beta h)=\alpha(f|g)+\beta(f|h)$

且 $(f|g)=(g|f)$ 所以 $(f|g)$ 是对称双线性型.

事实上 $(f|g)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{a_i b_j}{i+j+1}=\int_0^1 f(x)\cdot g(x)\,dx$ $\therefore (f|f)=\int_0^1 f^2(x)\,dx$

当 $f(x)\neq 0$ 时 $(f|f)>0$，所以 $(\cdot|\cdot)$ 正定，从而 $(\cdot|\cdot)$ 是内积.

$(x^i|x^j)$
$=\int_0^1 x^{i+j}dx$
$=\frac{1}{i+j+1}$

$$G(1,x,\cdots x^n)=\begin{pmatrix}(1,1) & (1,x) & \cdots & (1,x^n)\\ (x,1) & (x,x) & \cdots & (x,x^n)\\ \vdots & & & \\ (x^{n-1},1) & (x^{n-1},x) & \cdots & (x^{n-1},x^n)\\ (x^n,1) & (x^n,x) & \cdots & (x^n,x^n)\end{pmatrix}_{(n+1)\times(n+1)}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & \cdots & \frac{1}{n+1}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n+2}\\ \vdots & & & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \cdots & \frac{1}{2n}\\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n+1}\end{pmatrix}$$

$\square$

3. 设 V 是实内积空间, $\mathbf{x},\mathbf{y}\in V$. 证明: $\mathbf{x}\perp\mathbf{y}$ 当且仅当对任意的实数 t,

$$\|\mathbf{x}+t\mathbf{y}\|\geq\|\mathbf{x}\|.$$

证: ($\Rightarrow$): $x \perp y$, $\therefore$ $(x|y)=0$.

$\|x+ty\|^2 = (x+ty|x+ty) = \|x\|^2 + t^2\|y\|^2 + (x,ty) + (ty,x)$

$= \|x\|^2 + t^2\|y\|^2 + t(x,y) + t(y,x)$

$= \|x\|^2 + t^2\|y\|^2 + 2t(x,y) \geq 0$

$= \|x\|^2 + t^2\|y\|^2$

$\therefore \|x+ty\|^2 \geq \|x\|^2 \Rightarrow \|x+ty\| \geq \|x\|$.

($\Leftarrow$): $\|x+ty\|^2 = \|y\|^2 t^2 + 2(x|y)t + \|x\|^2$

其中 $\|y\|^2$, $2(x|y)$, $\|x\|^2$ 都是实数.

$\therefore$ $\|x+ty\|^2$ 是 $\mathbb{R}$ 上的关于 t 的一元二次多项式

$\because$ $\|x+ty\|^2 \geq \|x\|^2$ 对 $\forall t \in \mathbb{R}$

$\therefore$ $\|y\|^2 t^2 + 2(x|y)t \geq 0$ 对 $\forall t \in \mathbb{R}$

当 $\|y\|=0$ 时, $(x|y) = \|x\|\cdot\|y\|\cdot\cos\theta = 0$ $\therefore$ $x \perp y$

当 $\|y\| \neq 0$ 时, 判别式 $\Delta \leq 0$ $\therefore$ $(2(x|y))^2 \leq 0$

即 $(x|y)^2 \leq 0 \Rightarrow (x|y)=0 \Rightarrow x \perp y$. $\square$

4. 设 V 是 n 维欧式空间, $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 是 V 的一组基. 证明: 存在 V 的一组单位正交基 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 和 n 阶上三角矩阵 T 使得

$$(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n) = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)T.$$

(提示: 利用 Gram-Schmidt 正交化)

证: $e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ $e_2' = v_2 - (v_2|e_1)e_1$ $e_2 = \frac{e_2'}{\|e_2'\|}$

$\cdots$ $e_i' = v_i - (v_i|e_1)e_1 - \cdots - (v_i|e_{i-1})e_{i-1}$ $i \in \{2, \cdots, n\}$

$e_i = \frac{e_i'}{\|e_i'\|}$

事实：对 $1\leq i\leq n$, $e_i \in \langle v_1,\dots,v_i\rangle$

证明：$e_1 = \frac{1}{\|v_1\|}\cdot v_1$ 所以 $e_1 \in \langle v_1\rangle$

假设 对 $\forall j\leq i-1$ 都有 $e_j \in \langle v_1,\dots,v_j\rangle$

当 $j=i$ 时, $e_i' = v_i - (v_i|e_1)e_1 - \cdots - (v_i|e_{i-1})e_{i-1}$

由归纳假设 $e_1\in\langle v_1\rangle \cdots e_{i-1}\in\langle v_1,\dots,v_{i-1}\rangle$ $v_i\in\langle v_1,\dots,v_i\rangle$

所以 $e_i' \in \langle v_1,\dots,v_i\rangle$

又∵ $e_i = \frac{e_i'}{\|e_i'\|}$, ∴ $e_i\in\langle v_1,\dots,v_i\rangle$. 证毕.

所以 e_i 可以写成 $v_1,\dots,v_i$ 的线性组合

设 $e_i = \sum_{j=1}^{i} a_{ij} v_j$ $\forall i\in\{2,\dots,n\}$

令 $$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\|v_1\|} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ 0 & a_{22} & \ddots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

从而 T 为上三角矩阵. □

回忆: 正交投影

定义: 设 $\vec v\in V\setminus\{0\}$, $\vec x\in V$, 称 $\left(\vec x\,\middle|\,\frac{\vec v}{\|\vec v\|}\right)\frac{\vec v}{\|\vec v\|}$ 为 $\vec x$ 在 $\vec v$ 上的投影.

命题: 设 $\dim(V)\geq 1$. 则上述投影算子 $\pi_{\vec v}$ 有以下性质:

(i) $\pi_v\in\mathcal{L}(V)$, 且 $\pi_v^2=\pi_v$;

(ii) 对任意 $\vec x\in V$, $(\vec x-\pi_{\vec v}(\vec x))\perp\vec v$.

(iii) $\mathrm{spec}_{\mathbb{R}}(\pi_{\vec v})=\{0,1\}$, $V^1=\langle v\rangle$, $V^0=\{\vec u\in V\mid \vec u\perp\vec v\}$.

Pf: (i) $\vec{v}$ 是固定向量，于是内积的双线性蕴含 $\pi_{\vec{v}}$ 是线性的.

设 $\vec{x}\in V$. 则

$$\pi_{\vec{v}}^2(\vec{x})=\pi_{\vec{v}}\left(\frac{(\vec{x}|\vec{v})}{(\vec{v}|\vec{v})}\vec{v}\right)=\frac{(\vec{x}|\vec{v})}{(\vec{v}|\vec{v})}\pi_{\vec{v}}(\vec{v})=\frac{(\vec{x}|\vec{v})(\vec{v}|\vec{v})}{(\vec{v}|\vec{v})(\vec{v}|\vec{v})}\vec{v}=\frac{(\vec{x}|\vec{v})}{(\vec{v}|\vec{v})}\vec{v}=\pi_{\vec{v}}(\vec{x})$$

(ii)

$$(\vec{x}-\pi_{\vec{v}}(\vec{x})|\vec{v})=(\vec{x}|\vec{v})-(\pi_{\vec{v}}(\vec{x})|\vec{v})=(\vec{x}|\vec{v})-\frac{(\vec{x}|\vec{v})}{(\vec{v}|\vec{v})}(\vec{v}|\vec{v})=(\vec{x}|\vec{v})-(\vec{x}|\vec{v})=0$$

(iii) 因为 $\pi_{\vec{v}}(\vec{v})\neq\vec{0}$. 所以 $\pi_{\vec{v}}$ 不是零映射. 因为 $\dim(V)>1$. 所以存在 $\vec{w}\in V$ 使得 $\vec{w},\vec{v}$ 线性无关，注意到

$$\|\pi_{\vec{v}}(\vec{w})\|=\left\|\left(\vec{w}\,\Big|\,\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)\cdot\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right\|=\left|\left(\vec{w}\,\Big|\,\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)\right|\cdot\left\|\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right\|=\left|\left(\vec{w}\,\Big|\,\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right)\right|<\|\vec{w}\|$$

$\therefore$ $\pi_{\vec{v}}$ 不是恒同算子. 从而 $\mu_{\pi_{\vec{v}}}=t(t-1)$

$\therefore$ $\operatorname{spec}_{\mathbb{R}}(\pi_{\vec{v}})=\{0,1\}$.

设 $\vec{u}\in\langle\vec{v}\rangle$. 则存在 $\alpha\in\mathbb{R}$, s.t. $\vec{u}=\alpha\vec{v}$.

$$\pi_{\vec{v}}(\vec{u})=\pi_{\vec{v}}(\alpha\vec{v})=\alpha\pi_{\vec{v}}(\vec{v})=\alpha\vec{v}=\vec{u}\Rightarrow\vec{u}\in V^1\Rightarrow\langle\vec{v}\rangle\subseteq V^1.$$

设 $\vec{w}\in V^1$, 则 $\pi_{\vec{v}}(\vec{w})=\vec{w}$. 即

$$\vec{w}=\frac{(\vec{x}|\vec{v})}{(\vec{v}|\vec{v})}\vec{v}\Rightarrow\vec{w}\in\langle\vec{v}\rangle\Rightarrow V^1\subset\langle\vec{v}\rangle$$

设 $\vec{x}\in V^0$. 则 $\pi_{\vec{v}}(\vec{x})=0$. 由 $\pi_{\vec{v}}$ 的定义可知 $(\vec{x}|\vec{v})=0$. 即 $\vec{x}\perp\vec{v}$.

反之可验证 $\vec{x}\perp\vec{v}\Rightarrow\pi_{\vec{v}}(\vec{x})=0$ $\square$.

命题2.1. 设 $U\subset V$ 是子空间. $x\in V$. 则存在唯一的 $\vec{u}\in U$, 使得 $x-\vec{u}\in U^{\perp}$. 称 $\vec{u}$ 是 x 在子空间 U 上的正交投影.

证: 如果 $U=\{0\}$, 则令 $\vec{u}=0$ 即可.

否则设 $e_1,\dots,e_d$ 是 U 的一组单位正交基. 令 $\vec{u}=\underbrace{(x|e_1)}_{x\text{ 在 }e_1\text{ 上的投影}}e_1+\dots+(x|e_d)e_d$

则 $\vec{u}\in U$. 则 $(\vec{x}-\vec{u}|\vec{e}_i)=(x|\vec{e}_i)-(x|\vec{e}_i)=0$, $i=1,2,\cdots,d$.
因为 $\vec{x}-\vec{u}$ 与 U 的一组基底中的每个元素都正交, 所以 $\vec{x}-\vec{u}\perp U$.
唯一性. 设 $\vec{v}\in U$, 使得 $(\vec{x}-\vec{v})\perp U$, 则 $(\vec{x}-\vec{v}|\vec{e}_i)=0$
$\Rightarrow (\vec{x}|\vec{e}_i)=(\vec{v}|\vec{e}_i)$ $i=1,2,\cdots,d$ $\therefore$ $(\vec{v}|\vec{e}_i)=(\vec{u}|\vec{e}_i)$
$\Rightarrow \vec{u}=\vec{v}$

$\square$

例12.11 设 $U\subset V$ 是子空间, $\dim(U)=d$ 且 $0<d<n$
定义:
$$P_U: V \longrightarrow V$$
$$\vec{x} \longmapsto \vec{x}\text{ 在 }U\text{ 上的正交投影}$$
证明: P_U 是线性算子 (称为关于子空间 U 的正交投影算子) 并求出 P_U 的所有特征根和特征子空间.

Pf: 根据定理2.5 $V=U\oplus U^{\perp}$
由直和的定义 对 $\forall\vec{x}\in V$, $\exists$ 唯一的 $\vec{y}\in U$ s.t. $\vec{x}-\vec{y}\in U^{\perp}$
称 $\vec{y}$ 是 $\vec{x}$ 关于上述直和在 U 上的投影.
由正交投影的定义知, $\vec{y}$ 也是 $\vec{x}$ 在 U 上的正交投影.
所以 $P_U: V\longrightarrow V$
$$\vec{x}\longmapsto\vec{y}$$
是从 V 到 U 的关于上述直和的投影 从而是线性算子
设 $\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_d$ 是 U 的一组单位正交基, 则 $U^{\perp}$ 有单位正交基
$\vec{e}_{d+1},\cdots,\vec{e}_n$, 且
$$\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_d,\vec{e}_{d+1},\cdots,\vec{e}_n$$

是 V 的一组单位正交基，在该基下 P_U 的矩阵是

$$\mathrm{diag}(\underbrace{1,\cdots,1}_{d},\underbrace{0,\cdots,0}_{n-d})$$

故 P_U 有两个特征值 $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0$.

则 $U\subseteq V^{\lambda_1}$; $U^{\perp}\subseteq V^{\lambda_2}$

$\because \forall \vec{x}\in U$ $P_U(\vec{x})=1\cdot\vec{x}$ $\quad\forall \vec{x}\in U^{\perp}$ $P_U(\vec{x})=0\cdot\vec{x}$

因 $\dim V^{\lambda_1}=n-\mathrm{rank}(1\cdot E-A)=n-(n-d)=d=\dim(U)$

$\therefore U=V^{\lambda_1}$ 同理 $U^{\perp}=V^{\lambda_2}$. $\square$

命题3.2