

2025年春季学期第十五周作业

1. 设 V 是 n 维欧氏空间, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$. 证明:

(a) $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 + \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = 2\|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\|^2$.

(b) 如果 $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\|$, 则 $(\mathbf{u} + \mathbf{v}) \perp (\mathbf{u} - \mathbf{v})$.

(c) $(\mathbf{u}|\mathbf{v}) = \frac{1}{4}\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 - \frac{1}{4}\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$.

(d) $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta$, (θ 为 $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ 的夹角).

2. 设 $V = \mathbb{R}[x]_{<n+1}$. 对于 $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j$, 规定

$$(f|g) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{a_i b_j}{i+j+1}.$$

证明: $(\cdot|\cdot)$ 是 V 上的一个内积, 并求 Gram 矩阵 $G(1, x, \dots, x^n)$.

3. 设 V 是实内积空间, $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. 证明: $\mathbf{x} \perp \mathbf{y}$ 当且仅当对任意的实数 t ,

$$\|\mathbf{x} + t\mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{x}\|.$$

4. 设 V 是 n 维欧氏空间, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 是 V 的一组基. 证明: 存在 V 的一组单位正交基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 和 n 阶上三角矩阵 T 使得

$$(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)T.$$

(提示: 利用 Gram-Schmidt 正交化)

复习:

1. 内积

V 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

$$f: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

② 对称 ① 双线型 ③ 且 $f(x, x)$ 正定 (V, f) 是一个欧氏空间.

给定 V 的一组基, 其 Gram 矩阵即为 $f(x, y)$ 在这组基下的矩阵.

定理: $v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ $\text{rank}(G(v_1, \dots, v_n)) = n$ 当且仅当 $v_1, \dots, v_n$ 线性无关.

2. Cauchy-Bunyakovsky 不等式:

$$x, y \in V. \quad |(x|y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|.$$

$(x|y) = \|x\| \cdot \|y\|$ 当且仅当 x, y 线性相关.

$$(x|y) = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \theta \quad (\theta \text{ 为 } x \text{ 与 } y \text{ 的夹角}).$$

1° 标准欧氏空间 $\mathbb{R}^n$: $\forall x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}.$

$$(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2)$$

2° S 正定 $\forall X, Y \in \mathbb{R}^n$. $(X^T S Y)^2 \leq (X^T S X)(Y^T S Y)$

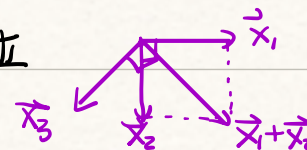
3°. $(\int_a^b f(x)g(x) dx)^2 \leq (\int_a^b f(x)^2 dx)(\int_a^b g(x)^2 dx)$ 对区间 $[a, b]$ 上任意连续函数 $f(x), g(x)$ 成立.

推论: 三角不等式: $\|\vec{x} \pm \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$. 等号成立当且仅当 $\vec{x}, \vec{y}$ 同向

$$\sqrt{\int_a^b (f(x) \pm g(x))^2 dx} \leq \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx} + \sqrt{\int_a^b g(x)^2 dx} \quad (\text{闵可夫斯基不等式})$$

2.2 勾股定理: $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$ 当且仅当 $\vec{x} \perp \vec{y}$.

更一般地: 两两正交向量 $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \Rightarrow \|\vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n\|^2 = \|\vec{x}_1\|^2 + \dots + \|\vec{x}_n\|^2$. 但反之不成立



1. 设 V 是 n 维欧氏空间, $u, v \in V$. 证明:

(a) $\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$. 平行四边形法则

(b) 如果 $\|u\| = \|v\|$, 则 $(u + v) \perp (u - v)$. 菱形即对角线互相垂直

(c) $(u|v) = \frac{1}{4}\|u + v\|^2 - \frac{1}{4}\|u - v\|^2$.

(d) $\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\|u\|\|v\|\cos\theta$, (θ 为 u, v 的夹角). 余弦定理.

证明: (a) 由 $\vec{x} \in V, \|\vec{x}\| = \sqrt{(\vec{x}|\vec{x})}$. 得:

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= (\vec{u} + \vec{v} | \vec{u} + \vec{v}) + (\vec{u} - \vec{v} | \vec{u} - \vec{v}) \\ &= (\vec{u} | \vec{u}) + (\vec{u} | \vec{v}) + (\vec{v} | \vec{u}) + (\vec{v} | \vec{v}) + (\vec{u} | \vec{u}) - (\vec{u} | \vec{v}) - (\vec{v} | \vec{u}) + (\vec{v} | \vec{v}) \\ &= 2(\vec{u} | \vec{u}) + 2(\vec{v} | \vec{v}) \\ &= 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b)} \quad (\vec{u} + \vec{v} | \vec{u} - \vec{v}) &= (\vec{u} | \vec{u}) - (\vec{u} | \vec{v}) + (\vec{v} | \vec{u}) - (\vec{v} | \vec{v}) \\ &= \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \end{aligned}$$

$$\because \|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| \quad \therefore (\vec{u} + \vec{v} | \vec{u} - \vec{v}) = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \text{RHS} &= \frac{1}{4} ((\vec{u} + \vec{v} | \vec{u} + \vec{v}) - (\vec{u} - \vec{v} | \vec{u} - \vec{v})) \\ &= \frac{1}{4} ((\vec{u} | \vec{u}) + 2(\vec{u} | \vec{v}) + (\vec{v} | \vec{v}) - (\vec{u} | \vec{u}) + 2(\vec{u} | \vec{v}) - (\vec{v} | \vec{v})) \\ &= (\vec{u} | \vec{v}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad \text{LHS} &= \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = (\vec{u} - \vec{v} | \vec{u} - \vec{v}) \\ &= (\vec{u} | \vec{u}) - 2(\vec{u} | \vec{v}) + (\vec{v} | \vec{v}) \end{aligned}$$

$$\text{又由 } (\vec{u} | \vec{v}) = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos \theta.$$

(θ 为 $\vec{u}, \vec{v}$ 的夹角).

$$\text{故 } \text{LHS} = \|\vec{u}\|^2 - 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|\cos \theta + \|\vec{v}\|^2$$

2. 设 $V = \mathbb{R}[x]_{<n+1}$. 对于 $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j$, 规定

$$(f|g) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{a_i b_j}{i+j+1}.$$

证明: $(\cdot|\cdot)$ 是 V 上的一个内积, 并求 Gram 矩阵 $G(1, x, \dots, x^n)$.

证明: 首先验证 $(\cdot|\cdot)$ 是 V 上的一个内积. 注意到:

$$(f|g) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i b_j \int_0^1 x^{i+j} dx = \int_0^1 \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n a_i b_j x^{i+j} dx = \int_0^1 f \cdot g dx.$$

① 双线性性: $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. 设 $f_1(x) = \sum_{i=0}^n a_{1,i} x^i$, $f_2(x) = \sum_{i=0}^n a_{2,i} x^i$, $g(x) = \sum_{j=0}^n b_j x^j$.

$$\begin{aligned} (\alpha f_1 + \beta f_2 | g) &= \int_0^1 (\alpha f_1 + \beta f_2) \cdot g dx \\ &= \alpha \int_0^1 f_1 \cdot g dx + \beta \int_0^1 f_2 \cdot g dx \\ &= \alpha (f_1 | g) + \beta (f_2 | g) \end{aligned}$$

$(\cdot|\cdot)$ 关于第1个变元是线性的. 类似地, 可验证其关于第2个变元是线性的.

故 $(\cdot|\cdot)$ 是双线性型. 显然可证 $(\cdot|\cdot)$ 是对称的. ^②

③ 正定性: $(g|g) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \frac{b_i b_j}{i+j+1} = \int_0^1 g(x)^2 dx \geq 0.$

$$(g|g) = 0 \Leftrightarrow g = 0.$$

$$G(x_0, \dots, x_n) = \left((x^i | x^j) \right)_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}} = \left(\frac{1}{i+j+1} \right)_{\substack{0 \leq i \leq n \\ 0 \leq j \leq n}}$$

→ 正定矩阵

$$\text{即: } (g | g) = (b_0 \dots b_n) \begin{pmatrix} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

3. 设 V 是实内积空间, $x, y \in V$. 证明: $x \perp y$ 当且仅当对任意的实数 t ,

$$\|x + ty\| \geq \|x\|.$$

证明:

$$" \Rightarrow " \quad \because x \perp y \quad \therefore (x | y) = 0.$$

$$\|x + ty\|^2 = (x + ty | x + ty) = (x | x) + 2t(x | y) + t^2(y | y) = \|x\|^2 + t^2\|y\|^2 \geq \|x\|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{故 } \|x + ty\| \geq \|x\|.$$

$$" \Leftarrow " \quad \text{若对 } \forall t \in \mathbb{R}, \|x + ty\| \geq \|x\|. \text{ 则 } \forall t \in \mathbb{R} \quad \|x + ty\|^2 - \|x\|^2 = (y | y)t^2 + 2(x | y)t \geq 0.$$

$$\text{若 } y = 0 \text{ 则上述不等式恒成立且 } (x | y) = 0.$$

$$\text{若 } y \neq 0, \text{ 即 } (y | y) \neq 0, \text{ 则 } \Delta = 4(x | y)^2 \leq 0 \Rightarrow (x | y) = 0.$$

4. 设 V 是 n 维欧氏空间, $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ 是 V 的一组基. 证明: 存在 V 的一组单位正交基 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 和 n 阶上三角矩阵 T 使得

$$(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)T.$$

(提示: 利用 Gram-Schmidt 正交化)

证明:

$$\text{令 } \vec{e}_1 = \vec{v}_1.$$

$\vec{v}_2$ 在 $\vec{e}_1$ 上的投影

先设法构造出一组正交基:

$$\vec{e}_2 = \vec{v}_2 - \frac{(\vec{v}_2 | \vec{e}_1)}{(\vec{e}_1 | \vec{e}_1)} \vec{e}_1,$$

$$\vec{e}_3 = \vec{v}_3 - \frac{(\vec{v}_3 | \vec{e}_1)}{(\vec{e}_1 | \vec{e}_1)} \vec{e}_1 - \frac{(\vec{v}_3 | \vec{e}_2)}{(\vec{e}_2 | \vec{e}_2)} \vec{e}_2,$$

...

$$\vec{e}_n = \vec{v}_n - \frac{(\vec{v}_n | \vec{e}_1)}{(\vec{e}_1 | \vec{e}_1)} \vec{e}_1 - \dots - \frac{(\vec{v}_n | \vec{e}_{n-1})}{(\vec{e}_{n-1} | \vec{e}_{n-1})} \vec{e}_{n-1}.$$

断言: $\forall i=2, \dots, n, \forall j < i, (\vec{e}_i | \vec{e}_j) = 0$

$$\text{首先当 } i=2 \text{ 时 } (\vec{e}_2 | \vec{e}_1) = (\vec{v}_2 - \frac{(\vec{v}_2 | \vec{e}_1)}{(\vec{e}_1 | \vec{e}_1)} \vec{e}_1 | \vec{e}_1) = (\vec{v}_2 | \vec{e}_1) - \frac{(\vec{v}_2 | \vec{e}_1)}{(\vec{e}_1 | \vec{e}_1)} (\vec{e}_1 | \vec{e}_1) = 0.$$

其次, 假设结论对任意的 $1 \leq m < n$ 成立.

$$\text{取 } j \leq m, (\vec{e}_{n+1} | \vec{e}_j) = (\vec{v}_{n+1} - \frac{(\vec{v}_{n+1} | \vec{e}_1)}{(\vec{e}_1 | \vec{e}_1)} \vec{e}_1 - \dots - \frac{(\vec{v}_{n+1} | \vec{e}_m)}{(\vec{e}_m | \vec{e}_m)} \vec{e}_m | \vec{e}_j)$$

由归纳假设 $(\vec{e}_k | \vec{e}_j) = 0 \quad \forall k=1, \dots, m \text{ 但 } k \neq j.$

$$\begin{aligned} \therefore \forall j \leq m, (\vec{e}_{m+1} | \vec{e}_j) &= (\vec{v}_{i+1} | \vec{e}_j) - \frac{(\vec{v}_{i+1} | \vec{e}_j)}{(\vec{e}_j | \vec{e}_j)} \cdot (\vec{e}_j | \vec{e}_j) \\ &= 0. \end{aligned}$$

故此结论对 $i=m+1$ 也成立.

该断言成立. 即 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 是一组正交基.

单位化: 令 $\vec{e}_1 = \frac{\vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|}, \dots, \vec{e}_n = \frac{\vec{e}_n}{\|\vec{e}_n\|}$, 那么 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 是一组单位正交基.

由 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 的构造可得: $\vec{e}_i \in \langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_i \rangle \quad \forall i=1, \dots, n.$

存在上三角矩阵 T , 使得: $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n) \cdot T.$

注: $\forall m=1, \dots, n \quad \langle \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m \rangle = \langle \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m \rangle.$

推论: 欧氏空间 V 中任何一组两两正交的单位向量 $S = \{\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_k\}$ 都能扩充为 V 的一组单位正交基.

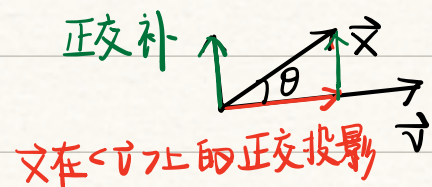
另外一种存在性证明: $q(x) = (x|x) = \|x\|^2$ 正定

$q(x)$ 在规范基 $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 下的规范型为: $q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$ 其中 $(x_1, \dots, x_n)$ 为 x 在这组基下的矩阵.

且证: $\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n$ 是 V 的一组单位正交基.

正交投影与正交补.

$\vec{v} \in V \setminus \{0\}, \vec{x} \in V, (\vec{x} | \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}) \cdot \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{(\vec{x}, \vec{v})}{(\vec{v}, \vec{v})} \cdot \vec{v}$ 是 $\vec{x}$ 在 $\vec{v}$ 上的投影.



例2.11. 设 $U \subset V$ 是子空间, $\dim(U) = d$ 且 $0 < d < n$. 定义:

$$p_U: V \longrightarrow V$$

$\vec{x} \mapsto \vec{x}$ 在 U 上的正交投影.

证明: p_U 是线性算子 (称为关于子空间 U 的正交投影算子), 并确定 p_U 的所有特征根和特征子空间.

证明: 由 $V = U \oplus U^\perp$, p_U 是从 V 到 U 关于此直和的 **投射**, 从而它是线性算子.

设 $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_d\}$ 是 U 的一组单位正交基, $\{\vec{e}_{d+1}, \dots, \vec{e}_n\}$ 是 $U^\perp$ 的一组单位正交基.

那么 $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ 是 V 的一组单位正交基, 在这组基下 p_U 的矩阵为

$$\text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_d, \underbrace{0, \dots, 0}_{n-d})$$

故 p_U 有两个特征根, 1 和 0, 对应的特征子空间分别是 $V^{\lambda_1} = U$ 和 $V^{\lambda_2} = U^\perp$. $\square$