

2025年春季学期第十六周作业

1. 设 W 是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

在 $\mathbb{R}^4$ 中的解空间. 求 $W^\perp$ 的一组单位正交基.

2. 设 V 是欧式空间, $\mathbf{v}$ 是 V 的单位向量. 设

$$\begin{aligned} \mathcal{A}: V &\longrightarrow V \\ \mathbf{x} &\mapsto 2(\mathbf{x}|\mathbf{v})\mathbf{v} - \mathbf{x}. \end{aligned}$$

- (i) 证明: $\mathcal{A}$ 是线性算子.
 - (ii) 证明: $\mathcal{A}$ 既是对称算子又是正交算子.
 - (iii) 计算 $\mathcal{A}$ 的所有特征子空间的维数.
3. (i) 设 U_1, U_2 都是 V 的子空间, 且 $U_1 \subset U_2$. 证明: $U_2^\perp \subset U_1^\perp$;
(ii) 设 U_1, U_2 都是 V 的子空间. 证明: $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$.
4. 设 $O_n(\mathbb{R})$ 是所有 n 阶正交矩阵关于乘法构成的群.
- (i) 令 $SO_n(\mathbb{R}) = \{P \in O_n(\mathbb{R}) | \det(P) = 1\}$. 证明: $SO_n(\mathbb{R})$ 是 $O_n(\mathbb{R})$ 的子群;
 - (ii) 设 $T \in O_n(\mathbb{R})$ 是上三角的. 证明: T 是对角的.
5. 设 V 是 n 维欧氏空间, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \in V$. 证明下列断言等价:
- (i) $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ 是 V 的一组单位正交基;
 - (ii) 对任意的 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$, $(\mathbf{x} | \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x} | \mathbf{e}_i)(\mathbf{y} | \mathbf{e}_i)$;
 - (iii) 对任意的 $\mathbf{x} \in V$, $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n (\mathbf{x} | \mathbf{e}_i)^2$.

1. 设 W 是

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

在 $\mathbb{R}^4$ 中的解空间. 求 $W^\perp$ 的一组单位正交基.

解: 由题意设系数矩阵的各行为 $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$. 设 $V = \langle \vec{v}_1^t, \dots, \vec{v}_4^t \rangle$.

则 $W = V^\perp \subseteq \mathbb{R}^4$. 故 $W^\perp = (V^\perp)^\perp = V$

$W^\perp$ 的一组基为 $\{\vec{v}_1^t, \vec{v}_2^t\}$ $\rightarrow$ 首先确定子空间的一组基

下面进行 Gram-Schmidt 正交化:

$$\begin{aligned} \vec{e}_1 &= \vec{v}_1^t, \quad \vec{e}_2 = \vec{v}_2^t - \frac{(\vec{v}_2^t | \vec{e}_1)}{(\vec{e}_1 | \vec{e}_1)} \cdot \vec{e}_1 \\ &= (2, 1, 0, 1)^t - \frac{1}{2} \cdot (1, 0, 0, -1)^t \\ &= \left(\frac{3}{2}, 1, 0, \frac{3}{2}\right)^t \end{aligned}$$

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} (1, 0, 0, -1)^t, \quad \vec{e}_2 = \frac{\vec{e}_2}{\|\vec{e}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{11}} \left(\frac{3}{2}, 1, 0, \frac{3}{2}\right)^t$$

$W^\perp$ 的一组单位正交基为 $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$.

2. 设 V 是欧式空间, $\mathbf{v}$ 是 V 的单位向量. 设

$$\begin{aligned} A: V &\longrightarrow V \\ \mathbf{x} &\mapsto 2(\mathbf{x}|\mathbf{v})\mathbf{v} - \mathbf{x}. \end{aligned}$$

(i) 证明: A 是线性算子.

(ii) 证明: A 既是对称算子又是正交算子.

(iii) 计算 A 的所有特征子空间的维数.

证明: (i) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$.

$$\begin{aligned} A(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) &= 2(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}|\mathbf{v})\mathbf{v} - (\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) \\ &= 2\alpha(\mathbf{x}|\mathbf{v})\mathbf{v} - \alpha\mathbf{x} + 2\beta(\mathbf{y}|\mathbf{v})\mathbf{v} - \beta\mathbf{y} \\ &= \alpha A(\mathbf{x}) + \beta A(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

故 A 是线性算子.

(ii) 令 $\mathbf{e}_1 = \mathbf{v}$, 将 $\mathbf{e}_1$ 扩充为 V 的一组单位正交基 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$

$$A(\mathbf{e}_1) = 2(\mathbf{e}_1|\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1$$

$$\forall i=2, \dots, n \quad A(\mathbf{e}_i) = 2(\mathbf{e}_i|\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_i = -\mathbf{e}_i$$

A 在单位正交基 $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ 下的矩阵为: $A = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & \ddots \\ & & & -1 \end{pmatrix}$

$\because A^t = A, A \cdot A^t = E \therefore A$ 是对称矩阵又是正交矩阵.

(iii) 由 A 的矩阵表示易知: A 有特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$.

$$V^{\lambda_1} = \langle \vec{e}_1 \rangle, V^{\lambda_2} = \langle \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n \rangle.$$

$$\therefore \dim V^{\lambda_1} = 1, \dim V^{\lambda_2} = n-1.$$

$\chi_A(t) = (t-1) \cdot (t+1)^{n-1}$, 于是 A 有两个特征值 $\lambda_1 = 1$ 和 $\lambda_2 = -1$.

因为 A 可对角化, 特征根的几何重数等于代数重数, 故 $\dim(V^{\lambda_1}) = 1$ 和 $\dim(V^{\lambda_2}) = n-1$.

另外一种思路: 验证 $(A(\vec{x}) | \vec{y}) = (\vec{x} | A(\vec{y}))$ 由伴随算子存在且唯一得 $A^* = A \Rightarrow A$ 为对称算子.

验证 $(A(\vec{x}) | A(\vec{y})) = (\vec{x} | \vec{y})$ A 保内算子 $\Leftrightarrow A$ 正交算子.

(验证 $A^* \circ A(\vec{x}) = A^2(\vec{x}) = \vec{x} \Rightarrow A^* \circ A = \text{id} \Rightarrow A$ 为正交算子.)

设 $\vec{x} \neq \vec{0}, \exists \lambda \in \mathbb{R}$ s.t. $A(\vec{x}) = Z(\vec{x} | \vec{v}) \cdot \vec{v} - \vec{x} = \lambda \vec{x}$, i.e., $Z(\vec{x} | \vec{v}) \cdot \vec{v} = (\lambda+1)\vec{x}$.

① $(\vec{x} | \vec{v}) \neq 0$ 且 $\lambda+1 \neq 0$, 此时, $\vec{x} \parallel \vec{v}$.

若 $\vec{x} \parallel \vec{v}$ 则 $A(\vec{x}) = \vec{x}$ 故 $\lambda = 1$. $V^1 = \langle \vec{v} \rangle$

② $(\vec{x} | \vec{v}) = 0 \Leftrightarrow \lambda = -1$ 故 $V^{-1} = \langle \vec{v} \rangle^\perp$.

由 $V = \langle \vec{v} \rangle \oplus \langle \vec{v} \rangle^\perp$ 得 $\dim V^1 = 1, \dim V^{-1} = n-1$

3. (i) 设 U_1, U_2 都是 V 的子空间, 且 $U_1 \subset U_2$. 证明: $U_2^\perp \subset U_1^\perp$;

(ii) 设 U_1, U_2 都是 V 的子空间. 证明: $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$.

证明: (i) $\forall \vec{x} \in U_2^\perp$ 则 $\forall \vec{y} \in U_1 \subset U_2$. $\vec{x} \perp \vec{y}$
故 $\vec{x} \in U_1^\perp$. 由 $\vec{x}$ 的任意性知: $U_2^\perp \subset U_1^\perp$.

(ii) $\because U_1 \cap U_2 \subset U_1$ 且 $U_1 \cap U_2 \subset U_2$

$\therefore U_1^\perp \subset (U_1 \cap U_2)^\perp, U_2^\perp \subset (U_1 \cap U_2)^\perp$

故 $U_1^\perp + U_2^\perp \subset (U_1 \cap U_2)^\perp$.

下面证明: $\dim(U_1^\perp + U_2^\perp) = \dim(U_1 \cap U_2)^\perp$.

设 $\dim V = n$, $\dim(U_1 \cap U_2)^\perp = n - \dim(U_1 \cap U_2) = n - \dim(U_1) - \dim(U_2) + \dim(U_1 + U_2)$ (*)

$\dim(U_1^\perp + U_2^\perp) = \dim(U_1^\perp) + \dim(U_2^\perp) - \dim(U_1^\perp \cap U_2^\perp)$

断言: $U_1^\perp \cap U_2^\perp = (U_1 + U_2)^\perp$

由 (i) 知: $(U_1 + U_2)^\perp \subset U_1^\perp \cap U_2^\perp$.

又 $\forall \vec{x} \in U_1^\perp \cap U_2^\perp$. 则 $\forall \vec{y} + \vec{z} \in U_1 + U_2$ 其中 $\vec{y} \in U_1, \vec{z} \in U_2$.

$(\vec{x} | \vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} | \vec{y}) + (\vec{x} | \vec{z}) = 0$.

故 $\vec{x} \in (U_1 + U_2)^\perp$. 因而 $U_1^\perp \cap U_2^\perp = (U_1 + U_2)^\perp$.

$$\dim(U_1^\perp + U_2^\perp) = \dim(U_1^\perp) + \dim(U_2^\perp) - \dim(U_1 + U_2)^\perp.$$

$$= n - \dim(U_1) + n - \dim(U_2) - (n - \dim(U_1 + U_2))$$

$$= n - \dim(U_1) - \dim(U_2) + \dim(U_1 + U_2). \quad (**)$$

对比(*)式和(**)式可知: $\dim(U_1 \cap U_2)^\perp = \dim(U_1^\perp + U_2^\perp)$

$$\text{故 } (U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp.$$

另外一种思路: 由 $(U^\perp)^\perp = U$ 和 $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$ 对 $\forall U, U_1, U_2 \subseteq V$ 均成立.

$$(U_1^\perp + U_2^\perp)^\perp = (U_1^\perp)^\perp \cap (U_2^\perp)^\perp = U_1 \cap U_2$$

$$\Rightarrow U_1^\perp + U_2^\perp = (U_1 \cap U_2)^\perp$$

4. 设 $O_n(\mathbb{R})$ 是所有 n 阶正交矩阵关于乘法构成的群.

(i) 令 $SO_n(\mathbb{R}) = \{P \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det(P) = 1\}$. 证明: $SO_n(\mathbb{R})$ 是 $O_n(\mathbb{R})$ 的子群;

(ii) 设 $T \in O_n(\mathbb{R})$ 是上三角的. 证明: T 是对角的.

证明: (i) 首先 单位元 $E_n \in SO_n(\mathbb{R})$

下面验证: $\forall A, B \in SO_n(\mathbb{R}), AB^{-1} \in SO_n(\mathbb{R})$ 存在逆元,

首先 $AB^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$. 关于矩阵乘法封闭

又 $\det(AB^{-1}) = \det(A) \cdot \det(B)^{-1} = 1$. 可得 $AB^{-1} \in SO_n(\mathbb{R})$.

证得: $SO_n(\mathbb{R})$ 是 $O_n(\mathbb{R})$ 的子群.

(ii) 设 $T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ & t_{22} & & \vdots \\ & \bigcirc & \ddots & \\ & & & t_{nn} \end{pmatrix} \in O_n(\mathbb{R})$

矩阵 T 的各列 $\{\vec{T}_1, \dots, \vec{T}_n\}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的单位正交向量组.

数学归纳法: 当 $n=1$ 时 $T = (t_{11})$ 为对角矩阵.

设 $n > 1$. 结论对 $n-1$ 情形均成立.

由 $|T| \neq 0$ 可知 $t_{ii} \neq 0 \quad \forall i=1, \dots, n$.

$\forall j=2, \dots, n$ 由 $(\vec{T}_1 | \vec{T}_j) = t_{1j} = 0$ 可得: $t_{1j} = 0$.

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & \tilde{T} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}, \quad \tilde{T} \in O_{n-1}(\mathbb{R}) \text{ 为上三角矩阵.}$$

由归纳假设, $\tilde{T}$ 为对角矩阵. 故 T 是对角矩阵.

综合上述, 对任意正整数 n , 结论均成立.

5. 设 V 是 n 维欧氏空间, $e_1, \dots, e_n \in V$. 证明下列断言等价:

- (i) $\{e_1, \dots, e_n\}$ 是 V 的一组单位正交基;
- (ii) 对任意的 $x, y \in V$, $(x | y) = \sum_{i=1}^n (x | e_i)(y | e_i)$;
- (iii) 对任意的 $x \in V$, $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (x | e_i)^2$.

证明: (i) $\Rightarrow$ (ii) $\because \{e_1, \dots, e_n\}$ 是 V 的一组单位正交基.

$$\text{设 } x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n, \quad y = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n.$$

$$(x | y) = (x_1, \dots, x_n) \underbrace{G(e_1, \dots, e_n)}_{= E_n} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\text{又 } (\vec{x}|\vec{e}_i) = (x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n|\vec{e}_i) = x_i \quad \forall i=1, \dots, n$$

$$\text{同理 } (\vec{y}|\vec{e}_i) = y_i \quad \text{故 } (\vec{x}|\vec{y}) = \sum_{i=1}^n (\vec{x}|\vec{e}_i)(\vec{y}|\vec{e}_i).$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 取 $\vec{y} = \vec{x}$ 可得

$$(\vec{x}|\vec{x}) = \sum_{i=1}^n (\vec{x}|\vec{e}_i)^2$$

$$\Rightarrow \|\vec{x}\|^2 = (\vec{x}|\vec{x}) = \sum_{i=1}^n (\vec{x}|\vec{e}_i)^2.$$

(iii) $\Rightarrow$ (i) 由 V 存在一组单位正交基 $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$

$$\text{设 } (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n) \cdot P. \quad (*)$$

下面证明 $P \in O_n(\mathbb{R})$:

$\forall \vec{x} \in V$. $\vec{x}$ 在 $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\}$ 下的坐标为 $\chi = (x_1, \dots, x_n)^T$, 其中 $x_i = (\vec{x}|\vec{e}_i) \quad \forall i=1, \dots, n$.

$$\|\vec{x}\|^2 = x_1^2 + \dots + x_n^2 = (x_1, \dots, x_n) E_n \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

$$\text{由 } (*) \text{ 式可得: } ((\vec{x}|\vec{e}_1), \dots, (\vec{x}|\vec{e}_n)) = ((\vec{x}|\vec{e}_1), \dots, (\vec{x}|\vec{e}_n)) \cdot P. = (x_1, \dots, x_n) \cdot P.$$

$$\sum_{i=1}^n (\vec{x}|\vec{e}_i)^2 = ((\vec{x}|\vec{e}_1), \dots, (\vec{x}|\vec{e}_n)) \begin{pmatrix} (\vec{x}|\vec{e}_1) \\ \vdots \\ (\vec{x}|\vec{e}_n) \end{pmatrix} = (x_1, \dots, x_n) \cdot P \cdot P^t \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$\because \forall \vec{x} \in V, \|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n (\vec{x} | \vec{e}_i)^2.$$

$$\therefore \forall X = (x_1, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n, X^t E_n X = X \cdot P \cdot P^t \cdot X$$

$$\Rightarrow X^t (E_n - P \cdot P^t) X = 0. \quad \text{实对称方阵 } E_n - P \cdot P^t \text{ 决定的二次型恒等于 } 0.$$

$$\text{令 } E_n - P \cdot P^t = A \in \text{SM}_n(\mathbb{R})$$

$$\text{取 } X = (0, \dots, \overset{\leftarrow \text{第 } i \text{ 个}}{1}, \dots, 0)^t \text{ 可得 } a_{ii} = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

$$\text{取 } X = (0, \dots, \underset{\uparrow \text{第 } i \text{ 个}}{1}, \dots, \underset{\uparrow \text{第 } j \text{ 个}}{1}, \dots, 0)^t \text{ 可得 } a_{ii} + a_{jj} + 2a_{ij} = 0 \Rightarrow a_{ij} = 0 \quad \forall i < j.$$

$$\text{故 } A = O_{n \times n} \text{ 即 } P \cdot P^t = E_n \Rightarrow P \in O_n(\mathbb{R}) \Rightarrow \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\} \text{ 为一组单位正交基. } \square$$

$$(x_1, \dots, x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \left(\sum_{i=1}^n a_{i1} x_i, \dots, \sum_{i=1}^n a_{in} x_i \right) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i y_j$$