

1. 验证实矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ 的所有顺序主子式都非负. 问该矩阵是否半正定?

证: 此矩阵的顺序主子式有: $|0| = 0$ $\det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 0$

所有顺序主子式都非负, 但此矩阵的迹为 (-1)

此矩阵非负定.

所以矩阵非负定 ($\times$) 所有顺序主子式都 ≥ 0
正定 $\Rightarrow$ $\dots \dots \dots > 0$

2. 设实二次型为 $q(x, y, z) = \lambda(x^2 + y^2 + z^2) + 3y^2 - 4xy - 2xz + 4yz$, 问:

- (1) λ 取什么值时二次型矩阵 q 为正定矩阵.
- (2) λ 取什么值时二次型矩阵 q 为半负定矩阵.
- (3) λ 取什么值时二次型矩阵 q 为实一次多项式的完全平方.

证: 此二次型对应的实对称矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & -2 & -1 \\ -2 & \lambda+3 & 2 \\ -1 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$$

A 的顺序主子式为: λ $\lambda(\lambda+3)-4 = \lambda^2+3\lambda-4$

$$\det(A) = \lambda^3 + 3\lambda^2 - 9\lambda + 5$$

$$(1) \text{ 正定: } \begin{cases} \lambda > 0 \\ \lambda^2+3\lambda-4 > 0 \\ \lambda^3+3\lambda^2-9\lambda+5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda > 0 \\ (\lambda+4)(\lambda-1) > 0 \\ (\lambda+5)(\lambda-1)^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda > 0 \\ \lambda < -4 \text{ 或 } \lambda > 1 \\ \lambda > -5 \text{ 且 } \lambda \neq 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda > 1$$

(2) 事实: 若 $A \in S_{n, \mathbb{R}}$, 为半负定矩阵, 则要么 A 负定, 要么 A 的行秩为 0.

Pf: 若 A 为半负定, 且 A 不是负定矩阵, 则 A 的秩为 $(0, \ell)$ 其中 $\ell < n$.

i.e. $\exists$ 可逆矩阵 P s.t. $P^t A P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -E_\ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 则 $\det(P^t A P) = 0$

因为 P 可逆, $\det(P) \neq 0$, 所以 $\det(A) = 0$.

(或若 A 半负定但不是负定, 则 A 不满秩 $\Rightarrow \det(A) = 0$)

① 负定: A 负定当且仅当 $-A$ 正定.

$$-A = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -\lambda-3 & -2 \\ 1 & -2 & -\lambda \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} -A \text{ 的顺序主子式为 } -\lambda, \lambda(\lambda+3)-4 = \lambda^2+3\lambda-4 \\ \det(-A) = -\lambda^3-3\lambda^2+9\lambda-5 \end{array}$$

$$A \text{ 正定当且仅当 } \begin{cases} -\lambda > 0 \\ \lambda^2+3\lambda-4 > 0 \\ -\lambda^3-3\lambda^2+9\lambda-5 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda < 0 \\ \lambda < -4 \text{ 或 } \lambda > 1 \\ \lambda < -5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \lambda < -5$$

② 解方程 $\det(A) = \lambda^3+3\lambda^2-9\lambda+5=0 \Rightarrow \lambda = -5 \text{ 或 } 1$

当 $\lambda = -5$ 时

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -12 & 24 \\ -2 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -12 & 24 \\ -12 & -2 & 2 \\ 24 & 2 & -5 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} 0 & -12 & 24 \\ -12 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -12 & 0 \\ -12 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -12 & -2 & -2 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & -2 & -5 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} -2 & -12 & -2 \\ -12 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & -12 & -2 \\ 0 & 12 & 12 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -12 & 12 \\ -2 & 12 & -5 \end{pmatrix} \\ &\sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -12 & 12 \\ 0 & 12 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 12 \\ 0 & 12 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 12 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ 负定}$$

$$\lambda = 1 \text{ 时 } \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 非正定}$$

所以 $\lambda \leq -5$.

(3) 若 A 可以写成实一次多项式的平方, 由实对称性知:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{则 } \text{rank}(A) = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1$$

从而 A 的所有 2 阶子式都为 0. (超降秩为 1, 至少有 2 阶子式不为 0, 且所有 3 阶子式均为 0)

$$\Rightarrow \lambda = -1$$

$$\text{且 } \lambda = 1 \text{ 时 } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 满足条件.}$$

法二. A 的秩为 1 $\Rightarrow \det(A) = 0$, 由 (2) 知 $\lambda = -1$ 或 $\lambda = -5$

$$\lambda = 1 \text{ 时 } A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ 满足.}$$

$$\lambda = -5 \text{ 时 } A = \begin{pmatrix} -5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix} \text{ 不满足.}$$

3. (i) 证明: 半正定矩阵的行列式非负.

(ii) 设 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, 证明

$$\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum_{i=1}^n a_i b_i \\ \sum_{i=1}^n a_i b_i & \sum_{i=1}^n b_i^2 \end{pmatrix}$$

半正定, 并以此证明 Cauchy 不等式.

1) 证: $\exists P \in GL_n(\mathbb{R})$ s.t.

$$A = P^t \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) P$$

$$\Rightarrow \det(A) = \det(P)^2 \det(D)$$

$$\det(D) \geq 0$$

$$\text{所以 } \det(A) \geq 0$$

3. 证: (1) 由定理 9.16 知 矩阵 A 半正定 $\Leftrightarrow$ 存在 $B \in M_n(\mathbb{R})$, 使得 $A = B^t B$

$$\text{则 } \det(A) = \det(B^t B) = (\det(B))^2 \geq 0.$$

$$(2) \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2 \quad \vec{x}^t A \vec{x} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum_{i=1}^n a_i b_i \\ \sum_{i=1}^n a_i b_i & \sum_{i=1}^n b_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 \sum_{i=1}^n a_i^2 + x_2 \sum_{i=1}^n a_i b_i & x_1 \sum_{i=1}^n a_i b_i + x_2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= x_1^2 \sum_{i=1}^n a_i^2 + x_1 x_2 \sum_{i=1}^n a_i b_i + x_1 x_2 \sum_{i=1}^n a_i b_i + x_2^2 \sum_{i=1}^n b_i^2$$

$$= \sum_{i=1}^n (x_1^2 a_i^2 + 2x_1 x_2 a_i b_i + x_2^2 b_i^2) = \sum_{i=1}^n (x_1 a_i + x_2 b_i)^2 \geq 0$$

由 (1) 可知, $\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n a_i^2 & \sum_{i=1}^n a_i b_i \\ \sum_{i=1}^n a_i b_i & \sum_{i=1}^n b_i^2 \end{vmatrix} \geq 0$

$$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i^2 \sum_{i=1}^n b_i^2 \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \quad \square$$

设 $j \in \{1, \dots, n\}$ 且 $\vec{A}^{(j)} = \vec{u} + \vec{v}$. 则

$$\det(A) = \det(\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(j-1)}, \vec{u}, \vec{A}^{(j+1)}, \dots, \vec{A}^{(n)})$$

(+ 同一行)

$$+ \det(\vec{A}^{(1)}, \dots, \vec{A}^{(j-1)}, \vec{v}, \vec{A}^{(j+1)}, \dots, \vec{A}^{(n)})$$

4. 设 A, B 均为 n 阶实对称矩阵, 如果 A 正定, ϵ 是充分小的实数. 证明: 方阵 $A + \epsilon B$ 是正定的.

证: 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 则 $A + \epsilon B$ 的任意 k 阶主子阵可表示为

$$\det \begin{pmatrix} a_{1,1} + \epsilon b_{1,1} & a_{1,2} + \epsilon b_{1,2} & \cdots & a_{1,k} + \epsilon b_{1,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} + \epsilon b_{k,1} & a_{k,2} + \epsilon b_{k,2} & \cdots & a_{k,k} + \epsilon b_{k,k} \end{pmatrix} \rightarrow \text{此主子阵记为 } D$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} + \epsilon b_{1,2} & \cdots & a_{1,k} + \epsilon b_{1,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} + \epsilon b_{k,2} & \cdots & a_{k,k} + \epsilon b_{k,k} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \epsilon b_{1,1} & - & - \\ \vdots & & \\ \epsilon b_{k,1} & - & - \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix} + \epsilon \cdot f(\epsilon), \text{ 其中 } f(\epsilon) \text{ 是以 } b_{ij} \text{ 为系数} \\ \text{的次数为 } k-1 \text{ 的关于 } \epsilon \text{ 的多项式}$$

$$\text{当 } \epsilon \rightarrow 0 \text{ 时, } \det(D) = \det \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k,1} & \cdots & a_{k,k} \end{pmatrix}$$

因为 A 正定所以 $\det(D) > 0$, 从而 $A + \epsilon B$ 为正定矩阵.

□

(注=): 因为 A 是正定矩阵, 所以存在可逆矩阵 P , s.t. $P^t A P = E_n$

$$\text{则 } P^t (A + \epsilon B) P = P^t A P + P^t \epsilon B P = E_n + \epsilon P^t B P$$

事实: $A + \epsilon B$ 的正定性等价于 $E_n + \epsilon P^t B P$ 的正定性

自己验证

记 $C = P^t B P$, 易证 C 为对称矩阵. 设 $C = (C_{ij})_{n \times n}$

$$\text{则 } E_n + \Sigma P^t B P = E_n + \Sigma C$$

$$= \begin{pmatrix} 1+\Sigma C_{1,1} & \Sigma C_{1,2} & \cdots & \Sigma C_{1,n} \\ \Sigma C_{2,1} & 1+\Sigma C_{2,2} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma C_{n,1} & \cdots & \cdots & 1+\Sigma C_{n,n} \end{pmatrix}$$

则 $E_n + \Sigma C$ 的任意 k 阶顺序主子式为

$$D_k := \det \begin{pmatrix} 1+\Sigma C_{1,1} & \Sigma C_{1,2} & \cdots & \Sigma C_{1,k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma C_{k,1} & \cdots & \cdots & 1+\Sigma C_{k,k} \end{pmatrix}$$

由行列式的计算方法(按行-列展开)可知

$$D_k = \det \begin{pmatrix} 1+\Sigma C_{1,1} & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & 1+\Sigma C_{k,k} \end{pmatrix} = (1+\Sigma) \cdot f \quad \text{其中 } f \text{ 是 } \Sigma \text{ 的 } k \text{ 阶主子式}$$

当 $\Sigma \rightarrow 0$ 时, $D_k \rightarrow 1 > 0$, 所以 $E_n + \Sigma P^t B P$ 是正定矩阵.

从而 $A + \Sigma B$ 也是正定矩阵. $\square$

5. 设 q 是 V 上的二次型, $U \subset V$ 是非零子空间,

$$\begin{aligned} q_U: U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto q(u) \end{aligned}$$

(i) 验证: q_U 是 U 上的二次型

(ii) 设 q 的签名是 (k, l) , q_U 的签名是 (s, t) . 证明: $k \geq s$ 且 $l \geq t$.

证: (i) 因为 q 是 V 上的二次型, 所以存在 $f(x, y) \in L^+(V)$.

$$\text{即 } q(x) = f(x, x)$$

$$\text{定义 } f_u: U \times U \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{从而 } q_u(x) = f_u(x, x)$$
$$(x, y) \mapsto f(x, y)$$

下证 $f_u \in L^+(U)$, 对 $\forall x, y, z \in U, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

因为 U 是 V 的子空间, 所以 $\alpha x + \beta y \in U \subseteq V$

$$f_u(\alpha x + \beta y, z) = f(\alpha x + \beta y, z) = \alpha f(x, z) + \beta f(y, z)$$
$$= \alpha f_u(x, z) + \beta f_u(y, z)$$

同理 f_u 关于第二个变量也是线性的.

$$\text{而且 } f_u(x, y) = f(x, y) = f(y, x) = f_u(y, x)$$

从而 $f_u \in L^+(U)$.

(ii) 设 $\dim(U) = m, \dim(V) = n$,

并且 $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m\}$ 是 U 的一组规范基.

$$\text{对 } \forall \vec{x} \in U, \text{ 设 } \vec{x} = \sum_{i=1}^m x_i \vec{e}_i, \quad q_u(\vec{x}) = f_u(\vec{x}, \vec{x}) = (x_1, \dots, x_m) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \vec{x}^T A \vec{x}$$

所以 q_u 在这组基下的矩阵为

$$A = (f_u(\vec{e}_i, \vec{e}_j))_{m \times m} = (f(\vec{e}_i, \vec{e}_j))_{m \times m}$$

$$\text{另一方面因为 } \{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n\} \text{ 是规范基, 所以 } A = \begin{pmatrix} E_m & & \\ & -E_t & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

将 U 中的基 $\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m\}$ 扩充为 V 中的一组基,

$\{\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_m, \vec{e}_{m+1}, \dots, \vec{e}_n\}$, 这组基不一定是 q 在 V 上的规范基.

所以 $B = (f(\vec{e}_i, \vec{e}_j))_{n \times n}$ 为 $q: V \rightarrow \mathbb{R}$ 的矩阵.

$$\text{从而 } B = \begin{pmatrix} A & \alpha \\ \alpha^t & \beta \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}^{n \times (n-m)} \quad \beta \in \mathbb{R}^{(n-m) \times (n-m)}$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} E_s & \alpha \\ \hline \alpha^t & \beta \end{array} \right)$$

对 B 做行初等变换 R' $B \sim_c$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} E_s & 0 & 0 \\ 0 & -E_t & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}}_M$$

M 中 1 的个数 $\geq s$, -1 的个数 $\geq t$

$$\Rightarrow k \geq s \quad t \geq t$$

□

补充: Hadamard 乘积 (children product)

设 $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, $B = (b_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$.

定义 $A \odot B = (a_{ij} \cdot b_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$

$$\text{eg: } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

性质: (i) $A \odot (B+C) = A \odot B + A \odot C$

(ii) $A \odot B = B \odot A$

(iii) $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \odot A = A \odot \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = A$

$\mathbb{R}$ 上 $(M_n(\mathbb{R}), +, O_{n \times n}, \odot, \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix})$ 为交换环.

(iv). $A \neq 0 \odot$ 可逆 $\Leftrightarrow \forall 1 \leq i, j \leq n, a_{ij} \in \mathbb{R}$ 可逆, 即 $a_{ij} \neq 0$.

定理: (Schur 乘积定理):

设 $A = (a_{ij})$ 与 $B = (b_{ij})$ 是 (半) 正定实矩阵, 则 $A \odot B$ 也是 (半) 正定实矩阵

pf 正定情形: $\because B$ 正定, $\therefore \exists T \in GL_n(\mathbb{R})$ s.t. $B = T^t T$, 则

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n t_{ki} t_{kj}$$

对 $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, 有 $\vec{x}^t (A \odot B) \vec{x} = \sum_{i,j} a_{ij} b_{ij} x_i x_j$

$$= \sum_{i,j} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^n t_{ki} t_{kj} \right) x_i x_j = \sum_{k=1}^n \sum_{i,j} a_{ij} t_{ki} t_{kj} x_i x_j$$

$$= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i,j} a_{ij} t_{ki} x_i t_{kj} x_j \right)$$

$$= \sum_{k=1}^n \vec{y}_k^t A \vec{y}_k \quad \text{其中 } \vec{y}_k = \begin{pmatrix} t_{k1} x_1 \\ \vdots \\ t_{kn} x_n \end{pmatrix}$$

因为 A 正定 所以 当 $\vec{y}_k \neq \vec{0}$ 时 $\vec{y}_k^t A \vec{y}_k > 0$.

因为 T 可逆, 所以一定存在 $k \in \{1, \dots, n\}$ 使 $\vec{y}_k \neq \vec{0}$ (T 的某行不为 0)

又对 $\forall \vec{x} \neq \vec{0}$, 存在 $k \in \{1, \dots, n\}$ 使 $\vec{y}_k \neq \vec{0}$, 则 $\vec{y}_k^t A \vec{y}_k > 0$

$$\text{从而 } \vec{x}^t (A \odot B) \vec{x} > 0 \Rightarrow A \odot B \text{ 正定 } \quad \square$$